

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1

ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Корень степени n	8
1.1.1. Понятие корня степени n	8
1.1.2. Свойства корня степени n	9
1.1.3. Тожественные преобразования иррациональных выражений.	13
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени n ».	14
1.2. Степень с рациональным показателем	16
1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем	16
1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем	17
1.2.3. Тожественные преобразования степенных выражений.	21
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2. «Степень с рациональным показателем»	22
1.3. Логарифм	24
1.3.1. Понятие логарифма	24
1.3.2. Свойства логарифмов.	24
1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы	28
1.3.4. Тожественные преобразования логарифмических выражений.	29
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3. «Логарифмы»	30
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс	32
1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента.	32
1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	33
1.4.3. Формулы сложения	37
1.4.4. Следствия из формул сложения	39
1.4.5. Формулы приведения.	41
1.4.6. Тожественные преобразования тригонометрических выражений.	42

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4. «Синус, косинус, тангенс, котангенс»	44
--	----

1.5. Прогрессии	46
1.5.1. Арифметическая прогрессия	46
1.5.2. Геометрическая прогрессия	50

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.5. «Прогрессии».	54
--	----

Тренировочные тестовые задания к разделу 1

«Выражения и преобразования»	56
--	----

Раздел 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения с одной переменной	58
---	----

2.2. Равносильность уравнений	59
---	----

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.1. «Уравнение с одной переменной»	62
--	----

2.3. Общие приемы решения уравнений	64
2.3.1. Разложение на множители	64
2.3.2. Замена переменной.	65
2.3.3. Использование свойств функций	69
2.3.4. Использование графиков	70

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.3. «Общие приемы решения уравнений».	72
---	----

2.4. Решение простейших уравнений.	74
2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений	74
2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений	81

2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно-рациональных относительно степенной функции)	89	Тренировочные тестовые задания к разделу 2 «Уравнения и неравенства»	130
2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	91		
2.4.5. Уравнения с параметрами	92		
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.4. «Решение простейших уравнений»	94		
2.5. Системы уравнений с двумя переменными.	96	Раздел 3 ФУНКЦИИ	
2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения	97	3.1. Числовые функции и их свойства.	132
2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения	98	3.1.1. Область определения функции	133
2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения	100	3.1.2. Множество значений функции	135
2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения	101	3.1.3. Непрерывность функции	137
2.5.5. Использование графиков при решении систем.	102	3.1.4. Периодичность функции	138
2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические)	102	3.1.5. Четность (нечетность) функции.	140
2.5.7. Системы уравнений с параметром	103	3.1.6. Возрастание (убывание) функции	141
2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения	104	3.1.7. Экстремумы функции	143
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.5. «Системы уравнений с двумя переменными»	106	3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции	144
2.6. Неравенства с одной переменной	108	3.1.9. Ограниченность функции	146
2.6.1. Рациональные неравенства	109	3.1.10. Сохранение знака функции.	147
2.6.2. Показательные неравенства.	112	3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком	148
2.6.3. Логарифмические неравенства	113	3.1.12. Значения функции	167
2.6.4. Использование графиков при решении неравенства	115	3.1.13. Свойства сложных функций	169
2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	118	Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.1. «Функции»	174
2.6.6. Неравенства с параметром	122	3.2. Производная функции.	178
2.6.7. Решение комбинированных неравенств	122	3.2.1. Геометрический смысл производной	179
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.6. «Неравенства с одной переменной»	124	3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции.	180
2.7. Системы неравенств.	126	3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной	181
2.8. Совокупность неравенств	127	3.2.4. Физический смысл производной	181
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.7. «Системы неравенств».	128	3.2.5. Таблица производных.	181
		3.2.6. Производная суммы двух функций	182
		3.2.7. Производная произведения двух функций	183
		3.2.8. Производная частного двух функций	183
		3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$	183
		3.2.10. Производная сложных функций.	183
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2. «Производная функции»	184
		3.3. Исследование функций с помощью производной	188
		3.3.1. Промежутки монотонности	188
		3.3.2. Промежутки монотонности и график производной.	189
		3.3.3. Экстремумы функции.	189
		3.3.4. Точки экстремумов функции	191
		3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции	192
		3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной	193
		3.3.7. Построение графиков функций	193

3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной	194	5.1.1. Равенство треугольников	224
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3. «Исследование функции с помощью производной»	196	5.1.2. Подобие треугольников	225
3.4. Первообразная	198	5.1.3. Неравенство треугольника	228
3.4.1. Первообразная суммы функций	199	5.1.4. Решение треугольников	229
3.4.2. Первообразная произведения функции на число	200	5.1.5. Площадь треугольника	233
3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции.	200	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1. «Треугольник»	234
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.4. «Первообразная»	202	5.2. Многоугольники.	238
Тренировочные тестовые задания к разделу 3 «Функции»	204	5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма.	240
Раздел 4 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ		5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника	241
4.1. Проценты	206	5.2.3. Ромб. Площадь ромба	241
4.1.1. Основные задачи на проценты	206	5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата	242
4.2. Пропорции	208	5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции	243
4.2.1. Основное свойство пропорции	208	5.2.6. Правильные многоугольники	245
4.2.2. Прямо пропорциональные величины	209	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2. «Многоугольники»	248
4.2.3. Обратно пропорциональные величины	210	5.3. Окружность.	250
4.3. Решение текстовых задач	210	5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга	250
4.3.1. Задачи на движение	210	5.3.2. Окружность, описанная около треугольника	254
4.3.2. Задачи на работу	212	5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник	255
4.3.3. Задачи на сложные проценты.	213	5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник	255
4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа	214	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3. «Окружность»	256
4.3.5. Задачи на концентрацию смеси и сплавы.	214	5.4. Равные векторы. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	258
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1. «Проценты».	216	5.4.1. Скалярные и векторные величины	258
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2. «Пропорции».	218	5.4.2. Равенство векторов	258
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3. «Решение текстовых задач»	220	5.4.3. Координаты вектора	259
Тренировочные тестовые задания к разделу 4 «Числа и выражения»	222	5.4.4. Сложение векторов	259
Раздел 5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА		5.4.5. Умножение вектора на число	260
5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника	224	5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами	261
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4. «Векторы»	262
		5.5. Многогранники	264
		5.5.1. Призма	264
		5.5.2. Пирамида.	274
		5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем	280
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5. «Многогранники»	282
		5.6. Тела вращения.	286
		5.6.1. Прямой круговой цилиндр.	286
		5.6.2. Прямой круговой конус	291

5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара	297	6.2.2. Классическое определение вероятности	333
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6. «Тела вращения»	300	6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий	333
5.7. Комбинации тел	306	6.2.4. Операции над событиями	334
5.7.1. Комбинации многогранников	306	6.2.5. Вероятность сложных событий	336
5.7.2. Комбинации тел вращения	306	6.2.6. Независимые события	336
5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения	310	6.2.7. Зависимые события	339
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.7. «Комбинации тел».	316	6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли	340
Тренировочные тестовые задания к разделу 5 «Геометрические фигуры, их свойства. Измерение геометрических величин». .318		6.2.9. Статистическое определение вероятности	341
		6.2.10. Закон больших чисел	342
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2. «Вероятность событий»	344
Раздел 6		6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и гра-фиков, анализ информации статистического характера	346
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ		6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы.	346
6.1. Простейшие комбинаторные задачи	320	6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения	348
6.1.1. Множества и операции над ними	320	6.3.3. Мода и медиана. Средние значения	349
6.1.2. Элементы комбинаторики	323	Тренировочные тестовые задания к разделу 6 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности»	350
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1. «Простейшие комбинаторные задачи»	330	Ответы к примерам заданий ЕГЭ.	352
6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов.	332	Ответы к тренировочным тестовым заданиям	354
6.2.1. Основные понятия теории вероятностей	332		

ТРЕНИРОВОЧНОЕ ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ

Тренировочное тестовое задание	358
Ответы.	365

МАТЕМАТИКА

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ



Выражения и преобразования



Уравнения и неравенства



Функции



Числа и выражения



Геометрические фигуры
и их свойства



Элементы комбинаторики,
статистики, теории вероятности





1.1. Корень степени n

1.1.1. Понятие корня степени n

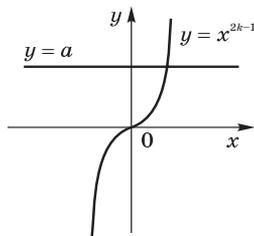
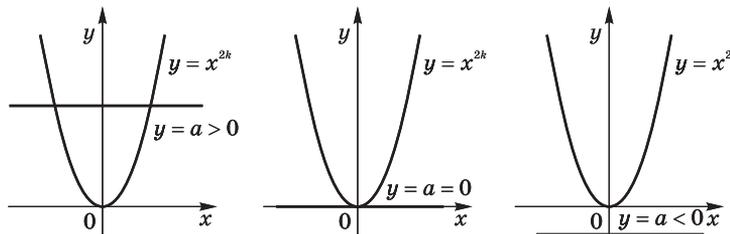
Корнем степени n из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a ; a — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2 , поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению, корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a .

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n -й степени из числа a .

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут \sqrt{a} и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n , коротко говорят «корень степени n » или «корень n -й степени».

Пример 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x, a \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Арифметический корень нечетной степени существует из любого число, поскольку

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, k \in \mathbb{N}.$$

Пример 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geq b$; б) $a < b$.

Решение.

$$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|.$$

а) если $a \geq b$, то $a-b \geq 0$ и $|a-b| = a-b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a-b$;

б) если $a < b$, то $a-b < 0$ и $|a-b| = -(a-b) = b-a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b-a$.

1.1.2. Свойства корня степени n

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\text{если } a \geq 0, b \geq 0, \text{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n -й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6$.

Пример 3. Упростите выражение:

$$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 &= (\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2 + 2\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} + (\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = \\ &= 7+2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7-2\sqrt{10} = 14 + 2\sqrt{49-4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\text{если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n -й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0, b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$.

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = |a^5| = |a|^5$.

Корень степени m из корня степени n

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\text{если } a \geq 0, \text{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, m \geq 2, n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \frac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \frac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \frac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \frac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \frac{3^3}{2^2 \cdot 5} = \frac{27}{20} = 1 \frac{7}{20}$.

Корень из произведения и частного корней

Пример 1. Упростите:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}}.$$

Решение.

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4} \sqrt[12]{(ab^2)^3} \cdot \sqrt[12]{(a^5b)^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$$

$$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8 a^3 b^6 a^{10} b^2} : \sqrt[8]{a^7 b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21} b^8} : \sqrt[8]{a^7 b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21} b^8)^2} : \sqrt[24]{(a^7 b^3)^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{\frac{a^{42} b^{16}}{a^{21} b^9}}} =$$

$$= \sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21} b^7}} = \sqrt[4]{a^3 b}.$$

Другие комбинации свойств корней степени n

Пример 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2^4 \sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2^4 \sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$\frac{5 + 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}} + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\frac{5 + 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}} + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} = \frac{(5 + 2\sqrt{2})^2}{(5 - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})} + \frac{(5 - 2\sqrt{2})^2}{(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})} = \frac{25 + 20\sqrt{2} + 8}{25 - 8} + \frac{25 - 20\sqrt{2} + 8}{25 - 8} = \frac{66}{17} = 3 \frac{15}{17}.$$

Пример 3. Найдите значение выражения:

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}.$$

Решение.

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \sqrt{16 + 8\sqrt{7} + 7} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} =$$

$$= \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{23^3 - (8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529 - 448} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{625 \cdot 4} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{4} = 5 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{a^9 \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b} = a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad \text{если } a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{a^{2n} b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$;
 $a \sqrt[2n]{b} = -\sqrt[2n]{a^{2n} b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{8}{25}}, a < 0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$; б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10} b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{b}{25}} = \sqrt{\frac{25a^2 b}{25}} = \sqrt{a^2 b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10} b}$; в) $\sqrt{a^2 b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^k \cdot b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}. \quad \text{Если } a \geq 0, \quad b > 0,$$

Пример. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$.

Ответ: $\frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1.
«Корень степени n »

Ответом на задания 1–18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.
Ответ следует записать без указания единиц измерения.

1. Вычислите $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Ответ: _____.

2. Вычислите $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$.

Ответ: _____.

3. Найдите значение выражения $(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}})^2$.

Ответ: _____.

4. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Ответ: _____.

6. Вычислите $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$.

Ответ: _____.

7. Вычислите $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$.

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}})^2$.

Ответ: _____.

9. Вычислите $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.

Ответ: _____.

10. Вычислите $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + 3}}$.

Ответ: _____.

11. Вычислите $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} + \sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Ответ: _____.

12. Вычислите $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} - \sqrt[4]{\frac{625}{16}}$.

Ответ: _____.

13. Вычислите $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Ответ: _____.

14. Вычислите $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} + \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: _____.

15. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0,3^{10} \cdot 2^{15}}$.

Ответ: _____.

16. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}} \cdot 4^{30}$.

Ответ: _____.

17. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

Ответ: _____.

1.2. Степень с рациональным показателем

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

n -й натуральной степенью действительного числа a называется действительное число b , получаемое в результате умножения числа a самого на себя n раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

n -ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$).

$$0^n = 0, 1^n = 1, a^1 = a.$$

Например:

$$5^1 = 5; 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81; (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например:

$$8^{-1} = \frac{1}{8}; 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9};$$

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Например:

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5; 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16};$$

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}. \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

$a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Например:

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3; 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}; (-5)^{\frac{1}{3}} \text{ — не определено.}$$

1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).$$

Пример 1. Представьте выражение в виде степени:

$$\text{а) } b^{\frac{2}{3}} \cdot b^2 = b^{\frac{2}{3} + 2} = b^{\frac{7}{3}};$$

$$\text{б) } x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{1-1}{2}} = x^0 = 1 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Пример 2. Вычислите:

$$\text{а) } 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}; \quad \text{б) } 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}.$$

Решение.

$$\text{а) } 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4+11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8;$$

$$\text{б) } 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2+5}{7}} = 5^1 = 5.$$

Пример 3. Вычислите:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3^1 = 3;$$

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^{4 \cdot \frac{1}{4}}}{2^{4 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \quad \left(a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} \right) \text{ или } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

Пример 1. Упростите:

$$\text{а) } a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15} - \frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{5}};$$

$$\text{б) } y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9} - \left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9} + \frac{1}{6}} = y^{\frac{13}{18}};$$

$$\text{в) } \frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3 - (-0,8)} = z^{-0,3 + 0,8} = z^{0,5}.$$

Пример 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^{\frac{7}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$