СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ФУНКЦИИ

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ГЕОМЕТРИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

Целые числа

Множество целых чисел		
Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: −1; −2; −3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N_-	

Степень с натуральным показателем

Степень
n-й степенью действительного числа a называется действительное число b, полученное в результате умножения числа a самого на себя n раз
$b = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n \in N$ a — основание степени, n — показатель степени $0^n = 0$ $(n > 0)$; $1^n = 1$; $a^1 = a$; 0^0 — не определено

Степень с натуральным показателем	
$a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $a \in R$, $n \in N$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$; $0^7 = 0$; $1^{100} = 1$; $(-1)^{99} = -1$; $(-1)^{100} = 1$

Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональные числа

<table>
<tr><th colspan="3">Множество рациональных чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной</td></tr>
<tr><td>дроби</td></tr>
</table>

Дроби

<table>
<tr><th colspan="2">Основное свойство дроби</th></tr>
<tr><td>Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю</td><td>$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m}$;
$\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сравнение дробей</th></tr>
<tr><td>Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше</td><td>$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}$, т. к. $7 < 11$</td></tr>
<tr><td>Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше</td><td>$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}$, т. к. $21 > 15$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сложение и вычитание</th></tr>
<tr><td>Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются</td><td>$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$;
$\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$
При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части	$5\frac{1}{8} + 1\frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} =$ $= 6 + \frac{3 + 20}{24} = 6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают	$2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{3}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{59}{8} = \frac{177}{10} = 17\frac{7}{10}$
Деление дробей	
При делении двух дробей деление заменяют умножением делимого на дробь, обратную делителю	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} =$ $= \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

Проценты

Проценты	
Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)	$1\% = \dfrac{1}{100}$ 1% от числа a — это $\dfrac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100%	$0{,}23 = 0{,}23 \cdot 100\% = 23\%$; $0{,}07 = 0{,}07 \cdot 100\% = 7\%$; $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$
Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком $\%$, разделить на 100	$13\% = 13 : 100 = 0{,}13$; $2\% = 2 : 100 = 0{,}02$; $123\% = 123 : 100 = 1{,}23$
Нахождение процента от числа	
$p\%$ от числа a равно: $\dfrac{p}{100} \cdot a$	20% от числа 120 равно: $\dfrac{20 \cdot 120}{100} = 24$
Нахождение числа по данному проценту	
Если $p\%$ от некоторого числа равно m, то всё число a равно: $a = \dfrac{m \cdot 100}{p}$	Если 15% от некоторого числа равно 45, то всё число равно: $\dfrac{45 \cdot 100}{15} = 300$
Нахождение процентного отношения двух чисел	
Число a составляет от числа b: $\dfrac{a}{b} \cdot 100\%$	Число 22 составляет от числа 88: $\dfrac{22}{88} \cdot 100\% = 25\%$

Окончание таблицы

Увеличение (уменьшение) на $p\%$	
Число a увеличилось на $p\%$: $a+\frac{p\ \%}{100\ \%}=a\left(1+\frac{p\ \%}{100\ \%}\right)$	Число 110 увеличилось на 5%: $110\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=110\cdot 1{,}05=$ $=115{,}5$
Число a уменьшилось на $p\%$: $a-\frac{p\ \%}{100\ \%}=a\left(1-\frac{p\ \%}{100\ \%}\right)$	Число 110 уменьшилось на 5%: $110\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)=110\cdot 0{,}95=$ $=104{,}5$
Формула сложных процентов	
Если A_0 — начальный капитал (вклад), p — годовой процент, n — количество лет, то в конце n-го года капитал составит: $A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$	Если начальный капитал — 5000 и годовой процент — 6, то в конце 3-го года капитал составит: $5000\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^3\approx 5955$

Степень с целым показателем

Степень с целым показателем	
$a^0=1,\ a\neq 0;$ 0^0 — не определено; $a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\geq 0,\ n\in Z$	$(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=-\frac{1}{27};$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4};$ $1{,}3^{-2}=\left(\frac{13}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{10}{13}\right)^2=\frac{100}{169}$

Основные свойства степени

Умножение степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4;$ $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$ $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
Деление степеней	
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125;$ $3^{2\sqrt{3}} : 3^{\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$
Возведение степени в степень	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2\cdot(-3)} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64};$ $\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{6}}$
Возведение в степень произведения	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-3ab^3c)^3 = -27a^3b^9c^3;$ $0{,}5^7 \cdot (-2)^7 = (0{,}5 \cdot (-2))^7 = (-1)^7 = -1$
Возведение в степень дроби	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

Корень степени *n* > 1 и его свойства

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a: $$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ b^2 = a \end{cases}$$	$\sqrt{36} = 6$, т. к. $6^2 = 36$, $6 > 0$; $\sqrt{25} \ne 8$, т. к. $8^2 \ne 25$; $\sqrt{25} \ne (-5)$, т. к. $-5 < 0$; $\sqrt{-3}$ — не определён

Тождества	
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \ge 0$	$\left(\sqrt{121}\right)^2 = 121$; $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, $a \in R$	$\sqrt{3^2} = \lvert 3 \rvert = 3$; $\sqrt{(-21)^2} = \lvert -21 \rvert = 21$; $\sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \left\lvert \sqrt{2} - \sqrt{3} \right\rvert = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
Основные свойства корня степени *n*	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$	$\sqrt{0,001} \cdot \sqrt{0,4} = \sqrt{0,001 \cdot 0,4} = \sqrt{0,0004} = 0,02$; $\sqrt{121 \cdot 625 \cdot 100} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{625} \cdot \sqrt{100} =$ $= 11 \cdot 25 \cdot 10 = 2750$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $b \ne 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \left\lvert \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right\rvert$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$; $\sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \dfrac{12}{13}$
$\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$; $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{\lvert a \rvert}\right)^p$	$\sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$

Окончание таблицы

Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$; если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$	$7 > \sqrt{7}$ и $\sqrt{7} > 1$; $\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}} < 1$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{3} > \sqrt{2}$, т. к. $3 > 2$

Арифметические корни n-й степени при $n \geq 2$, $n \in N$

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a} = b \\ n \in N,\ a \geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$	$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$; $\sqrt[5]{1024} = 4$; $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$
Если $a < 0$, то $\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3} = -\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} =$ $= -\left(2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-2$
Корень чётной степени из отрицательного числа не определён	
Тождества	
Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$, $a \in R$; $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$, $a \in R$;	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$; $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert -2 \rvert = 2$; $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

Основные свойства арифметического корня n-й степени	
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a\geq 0,\ m\in Z,\ n\in N$	$\sqrt[6]{8^8}=\sqrt[3]{8^4}=2^4=16$; $\sqrt[12]{m^3}=\sqrt[4]{m}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $a\geq 0,\ n\in N,\ n\neq 1$	$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$, $a\geq 0,\ k\in N$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $n\in N,\ n\geq 2,\ a\geq 0,\ b\geq 0$	$\sqrt[4]{16\cdot 625}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}=2\cdot 5=10$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[3]{27}=3$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $n\in N,\ n\geq 2,\ a\geq 0,\ b>0$	$\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\dfrac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=2$
Если $a>b\geq 0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$; если $a>1$, то $\sqrt[n]{a}>1$ и $\sqrt[n]{a}<a$; если $0<a<1$, то $0<\sqrt[n]{a}<1$; $\sqrt[n]{a}>a$	$\sqrt[7]{5}>\sqrt[7]{3}$, т. к. $5>3$; $\sqrt[5]{2}>1$, $\sqrt[5]{2}<2$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}<1$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}>\dfrac{1}{2}$

Степень с рациональным показателем и её свойства

Степень с рациональным показателем	
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a\neq 0,\ m\in Z,\ n\in N$, $n>2$	$36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=6$; $27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=3^2=9$; $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$; $32^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{32^{\frac{2}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{32^2}}=\dfrac{1}{4}$

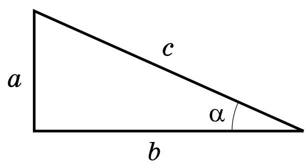
Свойства степени с действительным показателем

Степень с иррациональным показателем	
a^k, где k — иррациональное число, $a \neq 0$	$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1,4142...} \approx 25,9$

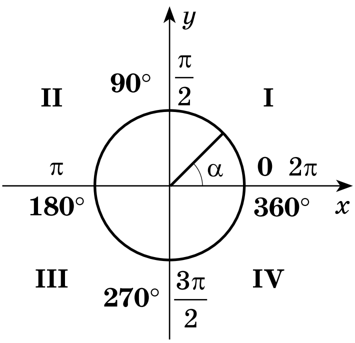
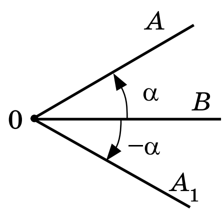
ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

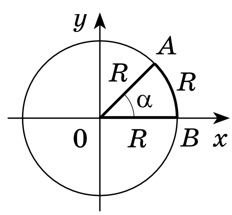
	a, b — катеты; c — гипотенуза; α — острый угол
Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему	$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$
Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$

Углы в тригонометрии

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Оси координат Ox и Oy разбивают окружность на четыре четверти:
I четверть: $0° < \alpha < 90°$;
II четверть: $90° < \alpha < 180°$;
III четверть: $180° < \alpha < 270°$;
IV четверть: $270° < \alpha < 360°$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\angle AOB = \alpha$; $\angle A_1OB = -\alpha$</td>
<td>В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная вращением луча вокруг своей начальной точки O.
Вращение **против** часовой стрелки — **положительное, по часовой — отрицательное**</td>
</tr>
</table>

Радианная мера угла

<table>
<tr>
<th colspan="2">Углы измеряются в градусах и радианах</th>
</tr>
<tr>
<td>1° — это угол, который равен $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.
$1° = 60'$ (60 минут)
$1' = 60''$ (60 секунд)
$$1° = \frac{\pi}{180°}$$
$$n° = \frac{\pi \cdot n}{180°}$$
$$135° = \frac{\pi \cdot 135°}{180°} = \frac{3\pi}{4}$$</td>
<td>

$\smile AB = R$, $\alpha = 1$
1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности.
$$1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi}$$</td>
</tr>
</table>