УДК 51(035)
ББК 22.1я2
В31

Вербицкий, Виктор Ильич.
В31 Математика / В.И. Вербицкий. — Москва : Эксмо, 2017. — 160 с. — (Супермобильный справочник).

Справочник охватывает весь школьный курс математики. Материал систематизирован и представлен в сжатом и наглядном виде. С помощью QR-кода предоставляется быстрый доступ к информационным ресурсам общего пользования (Wikipedia) по каждой конкретной теме для самостоятельного углубленного изучения. Справочник поможет эффективно подготовиться к ЕГЭ, а также сэкономить время.

УДК 51(035)
ББК 22.1я2

Справочное издание
аныќтамалыќ баспа
Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

СУПЕРМОБИЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

Вербицкий Виктор Ильич

МАТЕМАТИКА
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Подписано в печать 15.12.2016. Произведено 02.02.2017.
Формат $70\text{x}90^1/_{32}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,83.
Доп. тираж 3000 экз. Заказ

ISBN 978-5-699-80405-4
9 785699 804054 >
ISBN 978-5-699-80405-4

Знак информационной продукции
6+
согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ

BOOK24.RU
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

Содержание

6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник представляет собой краткое изложение школьного курса математики для учащихся старших классов и абитуриентов и ориентирован на подготовку к единому государственному экзамену. В книгу включены материалы по таким разделам школьной программы: «Алгебра», «Геометрия», «Начала математического анализа», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Справочник прост и удобен в использовании:

- материалы школьного курса систематизированы и изложены в конспективной, удобной для повторения и запоминания форме;
- в справочнике объединены теоретические материалы, соответствующие требованиям и формату ЕГЭ;
- используемые в справочнике QR-коды дают возможность получить максимально быстрый доступ к информационным ресурсам Интернета.

В каждом QR-коде зашифрована ссылка по конкретной теме на информационный ресурс, которую легко можно считать обычным мобильным телефоном, установив специальную программу типа Upcode или ScanLife.

Издание подготовлено в соответствии с современными требованиями школьной программы и может быть полезно при выполнении домашних заданий, подготовке к самостоятельным и контрольным работам, единому государственному экзамену.

1 АЛГЕБРА

1.1. Числа, корни и степени

1.1.1. Целые числа

Целыми числами называют натуральные числа, т. е. числа, используемые для счета (1; 2; 3; ...), нуль (0) и числа, противоположные натуральным (−1; −2; −3; ...).

> Число 1 (единица) не относится ни к простым, ни к составным числам.

Множество натуральных чисел обозначается N, множество целых чисел — Z.

Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется *составным*.

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

Пример 1. Разложить на простые множители: а) 18; б) 37; в) 360.

Решение: а) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$;

б) 37 — простое число, т. е. $37 = 37 \cdot 1$;

в) 360 можно разложить на простые множители делением «в столбик» так:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$, т. е. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Наименьшее общее кратное натуральных чисел n_1; n_2; ...; n_k (НОК$\{n_1; n_2; ...; n_k\}$) — это наименьшее натуральное число, которое делится на все указанные числа без остатка.

Наибольший общий делитель (НОД$\{n_1; n_2; ...; n_k\}$) — это наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка все указанные числа.

Для нахождения НОК и НОД следует разложить каждое из чисел на простые множители. НОК равно произведению всех образовавшихся простых чисел, каждое из которых возводится в наибольшую из степеней, в которых оно входит в разложения. НОД равен произведению всех простых множителей, общих для всех чисел, каждый из которых возведен в наименьшую из степеней, в которых оно входит в разложения. Если общих простых множителей нет, то НОД равен 1.

Числа m и n называются взаимно простыми, если НОД$\{m; n\} = 1$

Пример 2. Вычислить: а) НОК{12; 108; 162}; б) НОД{12; 108; 162}.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$, т. е. $12 = 2^2 \cdot 3$;

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\text{, т. е. } 108 = 2^2 \cdot 3^3;$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\text{, т. е. } 162 = 2 \cdot 3^4.$$

а) НОК$\{12; 108; 162\} = 2^2 \cdot 3^4 = 324$;
б) НОД$\{12; 108; 162\} = 2 \cdot 3 = 6$.
Ответ: а) 324; б) 6.

Свойства действий над целыми числами

Свойства сложения	
$m+n=n+m$	переместительное свойство
$(m+n)+l=m+(n+l)$	сочетательное свойство
$n+0=n$	свойство нуля
$m+(-m)=0$	сумма противоположных чисел
Свойства вычитания	
$m-(n+l)=m-n-l$	вычитание суммы чисел от числа
$(m+n)-l=$ $=(m-l)+n=m+(n-l)$	вычитание числа от суммы чисел

$m-0=m$	свойство нуля
$0-m=-m$	свойство нуля
Свойства умножения	
$mn=nm$	переместительное свойство
$(mn)l=m(nl)$	сочетательное свойство
$(m+n)l=ml+nl$	распределительное свойство
$(m-n)l=ml-nl$	распределительное свойство
$m\cdot 1=m$	свойство единицы
$m\cdot 0=0$	свойство нуля
$m\cdot\dfrac{1}{m}=1$, если $m\neq 0$	свойство обратных чисел
Свойства деления	
$(m\cdot n):l=m\cdot(n:l)=$ $=(m:l)\cdot n$	деление произведения на число
$(m+n):l=m:l+n:l$	деление суммы на число
$(m-n):l=m:l-n:l$	деление разности на число
$m:(n\cdot l)=(m:n):l=$ $=(m:l):n$	деление числа на произведение
$\cancel{m:0}$	делить на нуль нельзя!

1.1.2 Степень с натуральным показателем

n*-й натуральной степенью числа *a называется число b, полученное в результате умножения числа a на себя n раз: $a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

$(-a)^n = a^n$,
если n — четное;
$(-a)^n = -a^n$,
если n — нечетное.

По определению
$a^1 = a$.

Число a называется *основанием степени*, n — *показателем степени*.

Пример. Вычислить:

а) $(-5)^3$; б) $(-3)^4$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; г) $\left(2\frac{3}{5}\right)^2$.

Решение: а) $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$;

б) $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

г) $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $\left(2\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25}$.

Ответ: а) -125; б) 81; в) $\frac{8}{27}$; г) $6\frac{19}{25}$.

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональное число — это дробь вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$. Число m называется *числителем*, n — *знаменателем*.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *несократимой*, если m и n взаимно просты. В противном случае дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на их НОД. Например: $\frac{8}{12}=\frac{2^3}{2^2\cdot 3}=\frac{2^2\cdot 2}{2^2\cdot 3}=\frac{2}{3}$.

Вообще, $\frac{km}{kn}=\frac{m}{n}$.

Правильной называется дробь $\frac{m}{n}$, если $|m|<n$.

Неправильной называется дробь $\frac{m}{n}$, если $|m|\geq n$.

Неправильную дробь можно записать, выделив целую часть. Для этого следует разделить m на n с остатком:

$$\frac{m}{n}=p+\frac{q}{n},$$

где p — частное, q — остаток.

Например: $\frac{25}{8}=\frac{3\cdot 8+1}{8}=3+\frac{1}{8}=3\frac{1}{8}$.

Любое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Если в разложении знаменателя несократимой дроби на простые множители нет множителей, отличных от 2 и 5, то дробь будет *конечной*, в противном случае — *бесконечной периодической*.

Преобразование обыкновенной дроби в десятичную осуществляется путем деления в столбик и дописыванием нуля к каждому ненулевому остатку.

Пример 1. Представить в виде десятичной дроби: а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{14}$.

Решение: а)

$$\begin{array}{r|l} -50 & 8 \\ \underline{48} & \overline{0{,}625} \\ -20 & \\ \underline{16} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{5}{8} = 0{,}625$ — конечная десятичная дробь

б)

$$\begin{array}{r|l} -100 & 14 \\ \underline{98} & \overline{0{,}07142857\ldots} \\ -20 & \\ \underline{14} & \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{28} & \\ -120 & \\ \underline{112} & \\ -80 & \\ \underline{70} & \\ 100 & \end{array}$$

$\frac{1}{14} = 0{,}0(714285)$ — бесконечная десятичная дробь

Ответ: а) 0,625; б) 0,0(714285).

Преобразование дробей

Преобразование конечной десятичной дроби в обыкновенную	
$0,\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$, где $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — число из n цифр, в котором a_k — k-я цифра	**Пример.** $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $0,137 = \frac{137}{1000}$.

Преобразование десятичной периодической дроби в обыкновенную

$$0,\overline{a_1\ldots a_m}\left(\overline{b_1\ldots b_n}\right)=\frac{\overline{a_1\ldots a_m b_1\ldots b_n}-\overline{a_1\ldots a_m}}{\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}}.$$

В частности, $0,\left(\overline{b_1\ldots b_n}\right)=\dfrac{\overline{b_1\ldots b_n}}{\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ раз}}}$.

Пример. Представить в виде обыкновенной дроби: а) 0,(27); б) 0,11(7).

Решение:

а) $0,27=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$; б) $0,11(7)=\dfrac{117-11}{900}=\dfrac{106}{900}=\dfrac{53}{450}$.

Ответ: а) $\dfrac{3}{11}$; б) $\dfrac{53}{450}$.

Сложение и вычитание дробей

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями работает правило:

$$\frac{k}{n}\pm\frac{l}{n}=\frac{k\pm l}{n}.$$

Для сложения и вычитания дробей следует привести их к общему знаменателю и сложить (или вычесть) числители. Общим знаменателем является НОК знаменателей исходных дробей.

Пример 2. Вычислить: а) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{7}{27}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{27}$.

Решение:

а) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{2+1}{7}=\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{7}{27}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{27}=\dfrac{7+2-1}{27}=\dfrac{8}{27}$.

Ответ: а) $\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{8}{27}$.

Пример 3. Вычислить: а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$; б) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}$.

Решение:

а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}=\frac{29}{21}$;

б) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{1\cdot 8}{3\cdot 8}+\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}-\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=$

$=\frac{8}{24}+\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{8+20-21}{24}=\frac{7}{24}$.

Ответ: а) $\frac{29}{21}$; б) $\frac{7}{24}$.

Умножение и деление дробей

$\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{km}{ln}$; $\frac{k}{l}:\frac{m}{n}=\frac{kn}{lm}$.

Если среди дробей есть целое число r, его представляют как $\frac{r}{1}$.

Пример. Вычислить: а) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$; б) $1\frac{3}{4}:2\frac{7}{9}$; в) $6:\frac{3}{7}$.

Решение: а) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 5\cdot 4}=\frac{3}{20}$;

б) $1\frac{3}{4}:2\frac{7}{9}=\frac{7}{4}:\frac{25}{9}=\frac{7\cdot 9}{25\cdot 4}=\frac{63}{100}$;

в) $6:\frac{3}{7}=\frac{6}{1}:\frac{3}{7}=\frac{6\cdot 7}{3\cdot 1}=\frac{3\cdot 2\cdot 7}{3}=14$.

Ответ: а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{63}{100}$; в) 14.

Все свойства действий над целыми числами сохраняются для рациональных чисел. Кроме того, $\frac{p}{-q}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}$; $\frac{-p}{-q}=\frac{p}{q}$.

Пример 4. Вычислить: $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)$.

Решение: $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{5}{6}:\frac{6}{7}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}=\frac{35}{36}$.

Ответ: $\frac{35}{36}$.

Проценты, нахождение процента от величины и величины по ее проценту

Процентом от величины называется сотая часть этой величины:

$$1\,\%\cdot x=\frac{x}{100};\quad p\,\%\cdot x=\frac{p\cdot x}{100}.$$

Пример 5. Найти $2\ \%$ от 30.

Решение: $2\,\%\cdot 30=\frac{2\cdot 30}{100}=\frac{3}{5}$. Ответ можно дать и в виде десятичной дроби: $2\,\%\cdot 30=\frac{60}{100}=0{,}6$.

Ответ: $\frac{3}{5}$ или 0,6.

Пример 6. Найти число, если $3\ \%$ от него составляет 27.

Решение: $3\ \%\ \cdot\ x\ =\ 27$; $\frac{3x}{100}=27$; $x=\frac{100\cdot 27}{3}=900$.

Ответ: 900.

Пример 7. Найти процент содержания соли в растворе, если 50 кг раствора содержит 4 кг соли.

Решение: $50\ \cdot\ x\ \%\ =\ 4$; $\frac{50\cdot x}{100}=4$; $x=\frac{4\cdot 100}{50}=8$.

Ответ: $8\ \%$.

Пример 8. Сколько соли растворено в 10 кг семипроцентного раствора?

Решение: $\frac{10\cdot 7\,\%}{100}=\frac{7}{10}=0{,}7$ кг $=700$ г.

Ответ: 700 г.

1.1.4. Степень с целым показателем

Если $a \neq 0$, то по определению $a^0 = 1$; 0^0 — не определено.

Если $a \neq 0$, то по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Например: $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -8.$$

$(-a)^n = a^n$, если n — четное;
$(-a)^n = -a^n$, если n — нечетное

Свойства степени с целым показателем

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^7 \cdot 3^{-2} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-3} : 5^{-5} = 3^{-3+5} = 5^2 = 25$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$((-2)^3)^2 = (-2)^6 = 64$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{(-2)^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства

Корнем степени n из действительного числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.