УДК 373:51
ББК 22.1я721
У28

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс»

Удалова, Наталья Николаевна.

У28 Математика / Н. Н. Удалова. — Москва : Эксмо, 2017. — 192 с. — (Наглядный школьный курс: удобно и понятно).

ISBN 978-5-699-92620-6

В пособии в наглядной и доступной форме приводятся теоретические сведения за весь школьный курс математики, формулы, законы и понятия.

Издание окажет помощь старшеклассникам при подготовке к урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к экзаменам.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-699-92620-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

АЛГЕБРА 5

Числа, корни и степени 5

Основы тригонометрии 14

Логарифмы 21

Преобразование выражений 24

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА 37

Уравнения 37

Неравенства 59

ФУНКЦИИ 75

Определение и график функции 75

Элементарное исследование функций 80

Основные элементарные функции 85

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА 97

Производная 97

Исследование функций 105

Первообразная и интеграл 115

ГЕОМЕТРИЯ 122

Планиметрия 122

Прямые и плоскости в пространстве 133

Многогранники 141

Тела и поверхности вращения 150

Измерения геометрических фигур 156

Координаты и векторы 173

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 186

Элементы комбинаторики 186

Элементы статистики 188

Элементы теории вероятностей 189

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для систематизации и закрепления знаний учащихся по математике за курс средней школы.

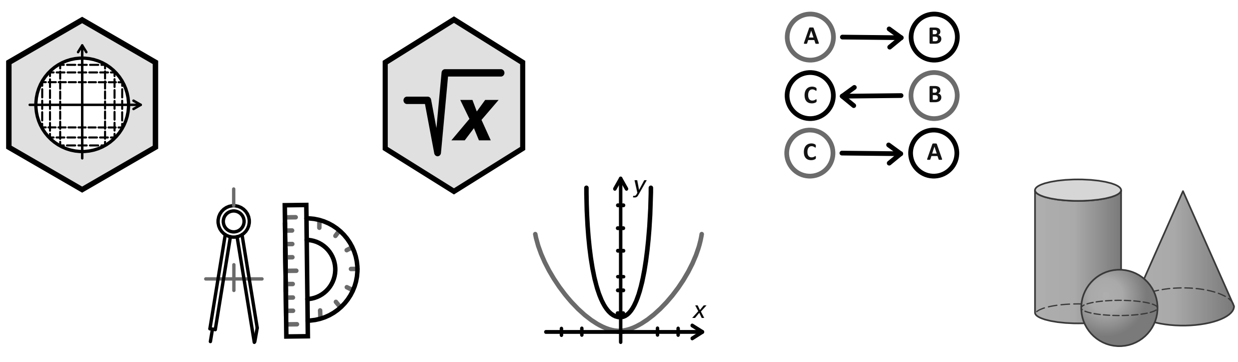
Книга содержит все изучаемые определения, правила, формулы, теоремы из курсов арифметики, алгебры, геометрии, начал математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и статистики. Представленный материал упорядочен и систематизирован, что поможет быстро сориентироваться и получить необходимую информацию.

Пособие будет полезно выпускникам для самостоятельной подготовки к единому государственному экзамену, так как обобщающий курс изложен последовательно от простого к сложному. В книге содержится дополнительный материал, необходимый для успешной сдачи ЕГЭ. Он включает метод рационализации, применяемый при решении неравенств, и координатный метод, используемый при решении стереометрических задач.

Теоретический материал иллюстрируют примеры с развёрнутым разъяснением, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса.

Издание, безусловно, поможет учащимся старших классов при подготовке к занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также сдаче единого государственного экзамена.

Желаем успехов!



АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

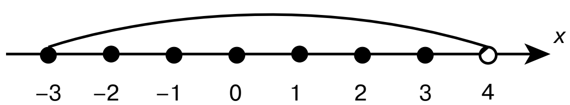
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — *N*; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — *Z*.

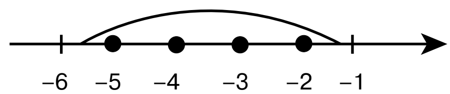
Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x \in [-3; 4)$;



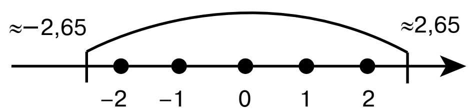
Ответ: 7.

б) $-5{,}6 < m \leq -1{,}3$.



Ответ: 4.

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$n^2 - 5 \leq 2,\ n^2 \leq 7,\ -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}$.

Ответ: 5.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n*, бóльшим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

Например:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$;

$0{,}2^6 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}000064$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}$$

***a* — основание степени**
***n* — показатель степени**

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства степеней

$a^1 = a$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

!

При чётной степени

$a,\ b > 0$

$(-a)^n = b$ $\qquad -a^n = -b$

$(-3)^4 = 81$ $\qquad -3^4 = -81$

Таблица степеней

a^n	Значения n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					

!

Если в основании отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$(-3)^4 = 81.$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$(-2)^5 = -32.$

а) $\frac{8^2}{2^5}=\frac{\left(2^3\right)^2}{2^5}=\frac{2^{3\cdot 2}}{2^5}=\frac{2^6}{2^5}=2^{6-5}=2^1=2;$

б) $\frac{6^{25}\cdot 9^{11}}{27^{15}\cdot 4^{12}}=\frac{(2\cdot 3)^{25}\cdot\left(3^2\right)^{11}}{\left(3^3\right)^{15}\cdot\left(2^2\right)^{12}}=\frac{2^{25}\cdot 3^{25}\cdot 3^{22}}{3^{45}\cdot 2^{24}}=\frac{2^{25}\cdot(3^{25}\cdot 3^{22})}{2^{24}\cdot 3^{45}}=\frac{2^{25}\cdot 3^{47}}{2^{24}\cdot 3^{45}}=2^{25-24}\cdot 3^{47-45}=2^1\cdot 3^2=18.$

ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$ ← **числитель** / ← **знаменатель**

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.
Например:

$\frac{3}{10}=0{,}3;\quad \frac{3}{100}=0{,}03;$

$2\frac{3}{1000}=2{,}003;\quad \frac{-7}{100}=-0{,}07.$

Основное свойство дроби
Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}}\textbf{, где } \boldsymbol{c\neq 0}$$

Например:

$\frac{0{,}35}{0{,}4}=\frac{0{,}35\cdot 100}{0{,}4\cdot 100}=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}.$

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 7 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$\frac{17}{8}=2{,}125;$

$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{12}{100}=0{,}12;$

$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{375}{1000}=0{,}375.$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 8 \\ \cline{2-2} 16 & 2{,}125 \\ \hline -10 & \\ 8 & \\ \hline -20 & \\ 16 & \\ \hline -40 & \\ 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$3\frac{5}{9}=\frac{3\cdot 9+5}{9}=\frac{32}{9}.$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:
1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных частей.
- Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
- Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

а) $2\frac{7^{\backslash 2}}{9}+3\frac{5^{\backslash 3}}{6}=2\frac{14}{18}+3\frac{15}{18}=5\frac{29}{18}=6\frac{11}{18}$;

б) $7-3\frac{2}{11}=6\frac{11}{11}-3\frac{2}{11}=3\frac{9}{11}$;

в) $9\frac{7^{\backslash 2}}{15}-2\frac{5^{\backslash 5}}{6}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=$

$=6\frac{19}{30}$;

г) $3\frac{5}{6}-2=1\frac{5}{6}$.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

$$2\frac{1}{3}\cdot4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot30}{3\cdot7}=10.$$

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) делимое умножить на число, обратное делителю.

а) $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$;

б) $\frac{3}{7}:14=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$;

в) $2:1\frac{3}{5}=2:\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25.$

$$\frac{2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{5}}=\frac{2\frac{1}{4}\cdot20}{3\frac{3}{5}\cdot20}=\frac{2\cdot20+\frac{1}{4}\cdot20}{3\cdot20+\frac{3}{5}\cdot20}=\frac{40+5}{60+12}=$$

$$=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}=0{,}625.$$

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

а) $2{,}35+11{,}7=14{,}05$;
$$\begin{array}{r} 11{,}70 \\ +\ \ 2{,}35 \\ \hline 14{,}05 \end{array}$$

б) $12-10{,}346=1{,}654$;
$$\begin{array}{r} 12{,}000 \\ -\ 10{,}346 \\ \hline 1{,}654 \end{array}$$

в) $16{,}77+12{,}23=29{,}00=29.$
$$\begin{array}{r} 16{,}77 \\ +\ 12{,}23 \\ \hline 29{,}00 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;

2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

$3{,}25\cdot 2{,}8=9{,}100=9{,}1.$

$$\begin{array}{r} \times\,3{,}25 \\ 2{,}8 \\ \hline 2600 \\ +\,650 \\ \hline 9{,}100 \end{array}$$

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

а) $183{,}24:9=20{,}36;$

$$\begin{array}{l|l} -183{,}24 & 9 \\ 18 & \overline{20{,}36} \\ \hline -32 & \\ 27 & \\ \hline -54 & \\ 54 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

>>>

>>>

б) $70{,}15:23=3{,}05;$

$$\begin{array}{l|l} -70{,}15 & 23 \\ 69 & \overline{3{,}05} \\ \hline -115 & \\ 115 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

в) $36:25=1{,}44.$

$$\begin{array}{l|l} -36 & 25 \\ 25 & \overline{1{,}44} \\ \hline -110 & \\ 100 & \\ \hline -100 & \\ 100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) после этого выполнить деление на натуральное число.

а) $25{,}6:0{,}08=2560:8=320;$

б) $12{,}35:2{,}5=123{,}5:25=4{,}94;$

в) $36:0{,}125=36000:125=288.$

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$\mathbf{1\%=\dfrac{1}{100}}$	$\mathbf{100\%=1}$
$\mathbf{3\%=0{,}03}$ $\mathbf{(3:100)}$	$\mathbf{0{,}2=20\%}$ $\mathbf{(0{,}2\cdot 100)}$

Шуба во время распродажи стоит 77 000 рублей. Скидки составляют 30%. Какова была стоимость шубы до распродажи?

Решение.

77 000 руб.	100% − 30% = 70%
x руб.	100%

$\dfrac{77\,000}{x}=\dfrac{70}{100};\quad x=\dfrac{77\,000\cdot 100}{70}=110\,000$ (руб.) — цена шубы до распродажи.

Ответ: 110 000.

Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей?

Решение.

120 руб.	100%
x руб.	100% + 30% = 130%

1) $\frac{120}{x}=\frac{100}{130}$; $x=\frac{120\cdot130}{100}=156$ (руб.) — цена одной чашки с наценкой;

2) $900:156=5\ldots\Rightarrow 5$ чашек можно купить.

Ответ: 5.

Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания стоимость билета составила 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение.

2500 руб.	100%
3000 руб.	x%

1) $\frac{2500}{3000}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{3000\cdot100}{2500}=120\%$;

2) 120% − 100% = 20% — повышение цены.

Ответ: 20%.

Первый сплав содержит 20% меди, второй — 10% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 14% меди. Найдите массу первого сплава.

Решение.

Сплав	Масса сплава	Масса меди
1	x	$0{,}2x$
2	$200-x$	$0{,}1(200-x)$
полученный	200	$0{,}2x+0{,}1(200-x)$ $200\cdot0{,}14=28$

20% = 0,2; 10% = 0,1;
14% = 0,14;

$$0{,}2x+0{,}1(200-x)=28$$

$$0{,}2x+(20-0{,}1x)=28$$

$x = 80$ (кг) — масса первого сплава.

Ответ: 80.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.
Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$.

Например:

а) $5=\frac{5}{1}$;

б) $1{,}5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Например:

а) $3=3{,}0$;

б) $\frac{3}{11}=0{,}(27)$.

$$\begin{array}{l|l} -3 & 11 \\ \underline{0} & 0{,}2727\ldots \\ -30 & \\ \underline{22} & \\ -80 & \\ \underline{77} & \\ -30 & \\ \underline{22} & \\ -80 & \\ \underline{77} & \\ 3 & \end{array}$$

ДЕЙСТВИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$\boxed{-(-a)=a}$$

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:
1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак «–».

Например:

$-2+(-7)=-(2+7)=-9$.

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:
1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например:

а) $-5+15=+(15-5)=10$;

б) $-17+11=-(17-11)=-6$.

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.
Например:

а) $-2-(-5)=-2+5=3$;

б) $8-9=8+(-9)=-1$.

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными** знаками, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».
Например:

а) $10\cdot(-3{,}5)=-35$;

б) $-0{,}25\cdot 4=-1$;

в) $-7:2=-3{,}5$.

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.
Например:

а) $-7\cdot(-10)=+70=70$;

б) $-42:(-7)=+6=6$.

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0$$

$$a^0=1,\ a\neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

а) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$; б) $(-4)^{-3}=\frac{1}{(-4)^3}=-\frac{1}{64}$;

в) $(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$; г) $-3^{-6}=-\frac{1}{3^6}=-\frac{1}{729}$;

д) $\frac{9^{-2}\cdot 36}{16^{-2}\cdot 27}=\frac{(3^2)^{-2}\cdot(3^2\cdot 2^2)}{(2^4)^{-2}\cdot 3^3}=\frac{3^{-4}\cdot 3^2\cdot 2^2}{2^{-8}\cdot 3^3}=\frac{3^{-2}\cdot 2^2}{3^3\cdot 2^{-8}}=\frac{2^8\cdot 2^2}{3^3\cdot 3^2}=\frac{2^{10}}{3^5}=\frac{1024}{243}$.

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n > 1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем *n*-й степени $(n \in N,\ n > 1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

$\sqrt[m]{a}$ не существует,
если $a < 0$ и m — чётное число.

а) $\sqrt{625} = 25$, т. к. $25^2 = 625$;

б) $\sqrt[3]{64} = 4$, т. к. $4^3 = 64$;

в) $\sqrt[3]{0{,}000\,027} = 0{,}03$, т. к. $(0{,}03)^3 = 0{,}000\,027$.

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

а) $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = |3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$,

т. к. $3 > \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$,

т. к. $\sqrt{5} > \sqrt{3}$;

>>>

>>>

в) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3} = 3-\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+3-4\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} =$

$= |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$, т. к. $2 > \sqrt{3}$.

Свойства корней *n*-й степени

Для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \geq 2$, $m \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

а) $\sqrt{7\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{66} = \sqrt{\frac{22}{3}\cdot 66} = \sqrt{22\cdot 22} = 22$;

б) $\sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} =$

$= \sqrt{18\cdot 50} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 25} = 3\cdot 2\cdot 5 = 30$.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a > 0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n \geq 2,\ m \in Z,\ n \in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Например:

а) $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$;

б) $3^{\frac{-4}{5}} = \sqrt[5]{3^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$$81^{\frac{1}{7}}\cdot 27^{\frac{1}{7}}=(81\cdot 27)^{\frac{1}{7}}=\left(3^4\cdot 3^3\right)^{\frac{1}{7}}=\left(3^7\right)^{\frac{1}{7}}=$$
$$=3^1=3.$$

$a>1$, r — рациональное число

Если $r>0$, то $a^r>1$

Если $r<0$, то $0<a^r<1$

$a>1$, r, t — рациональные числа

Если $r>t$, то $a^r>a^t$

$0<a<1$, r, t — рациональные числа

Если $r>t$, то $a^r<a^t$

Например:

а) $3^{\frac{1}{4}}>3^{\frac{1}{5}}$, т. к. $3>1$ и $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, т. к. $0<\frac{2}{5}<1$ и $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$;

в) $(3{,}7)^{-2{,}5}<1$, т. к. $3{,}7>1$, $-2{,}5<0$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x\in R$ и любом $a>0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x>0$ при $x\in R$, $a>0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

а) $\left(9^{\sqrt{26}-5}\right)^{\sqrt{26}+5}=9^{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)}=$

$=9^{\left(\sqrt{26}\right)^2-5^2}=9^{26-25}=9;$

б) $7^{5\sqrt{5}-1}\cdot 7^{1-3\sqrt{5}}:7^{2\sqrt{5}-1}=$

$=7^{(5\sqrt{5}-1)+(1-3\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-1)}=$

$=7^{5\sqrt{5}-1+1-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1}=7^1=7;$

в) $\dfrac{5^{\sqrt{7}}\cdot 6^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{(5\cdot 6)^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=\dfrac{30^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}}=$

$=30^{\sqrt{7}-(\sqrt{7}-2)}=30^{\sqrt{7}-\sqrt{7}+2}=30^2=900.$

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=$

$=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}}=3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}.$

б) $\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{0{,}5^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(2^{-1}\right)^{\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2^{-\sqrt{7}}}{2^{-\sqrt{7}-1}}=$

$=2^{-\sqrt{7}-1\left(-\sqrt{7}-1\right)}=2^{-\sqrt{7}+\sqrt{7}+1}=2^1=2.$

в) $\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{0{,}25^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}}=$

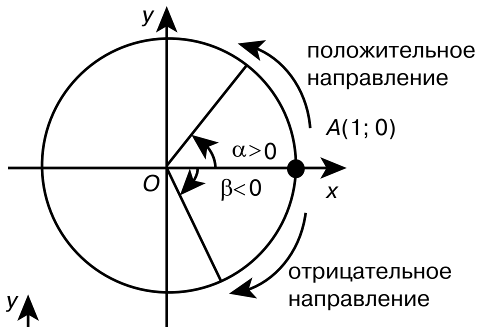
$=\dfrac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)}=2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=2^4=16.$

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мере угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат *xOy*.

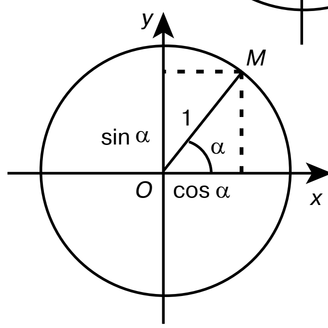


Синусом угла α (sin α) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α (cos α) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

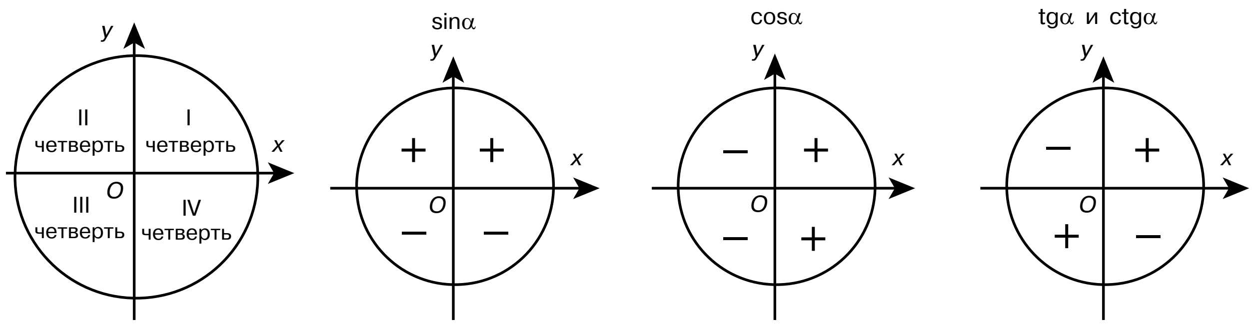
Тангенсом угла α (tg α) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α (ctg α) называется отношение косинуса угла к его синусу.



$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА



Определите знаки синуса, косинуса и тангенса.

а) $\alpha = 240°$;

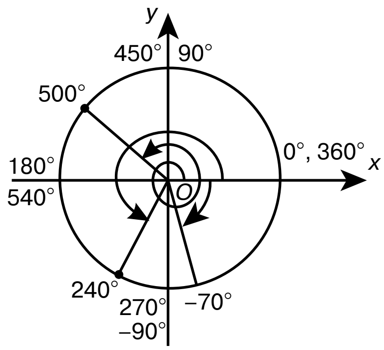
$\alpha = 240°$ — III четверть $\Rightarrow \sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

б) $\beta = 500°$;

$\beta = 500°$ — II четверть $\Rightarrow \sin\beta > 0$, $\cos\beta < 0$, $\operatorname{tg}\beta < 0$;

в) $\gamma = -70°$;

$\gamma = -70^0$ — IV четверть $\Rightarrow \sin\gamma < 0$, $\cos\gamma > 0$, $\operatorname{tg}\gamma < 0$.

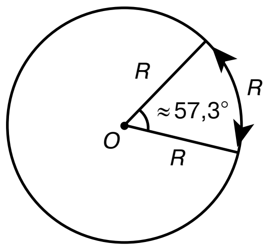


РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.

$$\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^\circ \qquad \mathbf{1°} = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\,\mathbf{рад}$$

$$\alpha\ \mathbf{рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ \qquad \alpha° = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\cdot\alpha\ \mathbf{рад}$$



Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах.

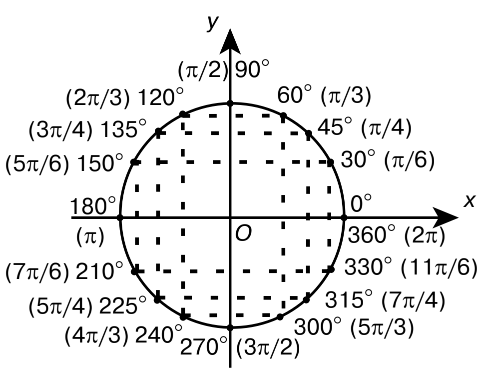
а) $80° = \frac{\pi}{180}\cdot 80 = \frac{4\pi}{9}$;

б) $290° = \frac{\pi}{180}\cdot 290 = \frac{29\pi}{18}$.

Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах.

а) $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{5}\right)^\circ = 36°$;

б) $3 = \left(\frac{180}{\pi}\cdot 3\right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$.

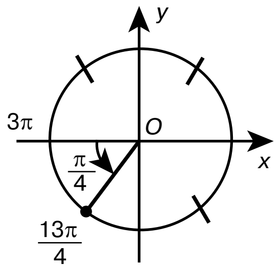


На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол.

а) $\frac{13\pi}{4}$

$\frac{13\pi}{4}=3\pi+\frac{\pi}{4};$

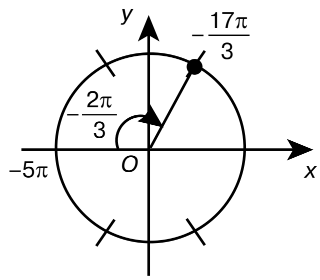
$$\begin{array}{r|l} -13 & 4 \\ 12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$



в) $-\frac{17\pi}{3}$

$-\frac{17\pi}{3}=-5\pi-\frac{2\pi}{3};$

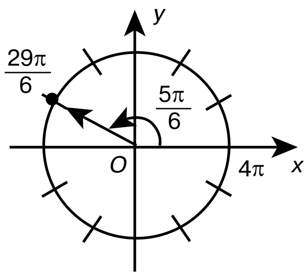
$$\begin{array}{r|l} -17 & 3 \\ 15 & 5 \\ \hline 2 & \end{array}$$



б) $\frac{29\pi}{6}$

$\frac{29\pi}{6}=4\pi+\frac{5\pi}{6};$

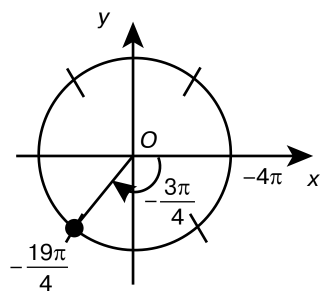
$$\begin{array}{r|l} -29 & 6 \\ 24 & 4 \\ \hline 5 & \end{array}$$



г) $-\frac{19\pi}{4}$

$-\frac{19\pi}{4}=-4\pi-\frac{3\pi}{4}.$

$$\begin{array}{r|l} -19 & 4 \\ 16 & 4 \\ \hline 3 & \end{array}$$



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

t	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg t	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—