СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 3
ФУНКЦИИ

Раздел 4
ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

Раздел 5
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

МАТЕМАТИКА

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ

Выражения и преобразования

Уравнения и неравенства

Функции

Числа и выражения

Геометрические фигуры и их свойства

Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятности

Раздел 1
Выражения и преобразования

1.1. Корень степени *n*

1.1.1. Понятие корня степени *n*

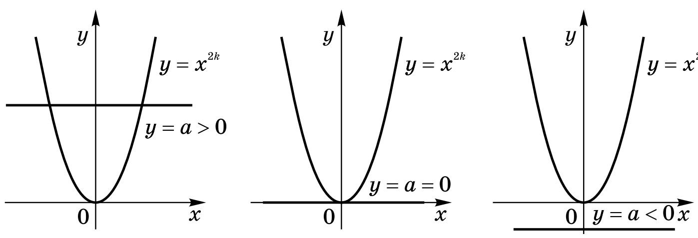
Корнем степени n из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a; a — действительное число.

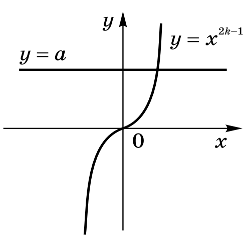
Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или −2, поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению, корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in \mathrm{N}$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2k - 1$, $k \in \mathrm{N}$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.





Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

П р и м е р 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8}=2$, поскольку $2^3=8$ и $2>0$;

б) $\sqrt[4]{81}=3$, поскольку $3^4=81$ и $3>0$;

в) $\sqrt[5]{1}=1$, поскольку $1^5=1$ и $1>0$;

г) $\sqrt[100]{0}=0$, поскольку $0^{100}=0$ и $0=0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$\sqrt[2k]{a}=x,\ a\ge 0,\ k\in N.$

Арифметический корень нечетной степени существует из любого число, поскольку

$\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a},\ \ k\in N.$

П р и м е р 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$;

б) $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0;\\ -a, \text{ если } a<0, \text{ где } k\in \mathrm{N}.\end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$, где $k\in \mathrm{N}$.

П р и м е р 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a\ge b$; б) $a<b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8}=|a-b|$.

а) если $a\ge b$, то $a-b\ge 0$ и $|a-b|=a-b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8}=a-b$;

б) если $a<b$, то $a-b<0$ и $|a-b|=-(a-b)=b-a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8}=b-a$.

1.1.2. Свойства корня степени n

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\textbf{если } a\ge 0,\ b\ge 0, \textbf{ то } \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ \text{где } a\ge 0,\ b\ge 0.$$

П р и м е р 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5;$

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500};$ б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}.$

Решение.

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10;$ б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6.$

Пример 3. Упростите выражение:

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$

Решение.

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = (\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2 + 2\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} + (\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 =$

$= 7 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7 - 2\sqrt{10} = 14 + 2\sqrt{49 - 4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20.$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}.$

Решение.

$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\textbf{если } a \ge 0 \textbf{ и } b > 0\textbf{, то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \ge 0,\ b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}};$ б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}};$ в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$ б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5;$ в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}};$ б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}.$

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3;$ б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2.$

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\textbf{если } a > 0, \textbf{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \textbf{ где } n \in \mathrm{N},\ n \ge 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}) = \sqrt[n]{a^m}, \textbf{ где } a \ge 0,\ n \in \mathrm{N},\ n \ge 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$.

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = \left|a^5\right| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\textbf{если } a \ge 0, \textbf{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ m \ge 2,\ n \ge 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^{10}}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \dfrac{3^2\cdot 5}{7^2} = \dfrac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6}\cdot\sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{3^3}{2^2\cdot 5} = \dfrac{27}{20} = 1\dfrac{7}{20}$.

Корень из произведения и частного корней

Пример 1. Упростите:

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}}$.

Решение.

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4}\sqrt[12]{(ab^2)^3}\cdot\sqrt[12]{(a^5b)^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}} =$

$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8a^3b^6a^{10}b^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21}b^8}:\sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21}b^8)^2}:\sqrt[24]{(a^7b^3)^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{\dfrac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21}b^7}} =$

$= \sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21}b^7}} = \sqrt[24]{a^3b}$.

Другие комбинации свойств корней степени *n*

Пример 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

$\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \dfrac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$.

Решение.

$\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \dfrac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \dfrac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})} + \dfrac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})} = \dfrac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8} + \dfrac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8} = \dfrac{66}{17} = 3\dfrac{15}{17}$.

Пример 3. Найдите значение выражения:

$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$.

Решение.

$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} =$

$= \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{23^3-(8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3$.

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}}=\sqrt[n]{a^n\cdot a^m}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{a^m}=a\sqrt[n]{a^m},\ a>0,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2^2}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2^2}=2\sqrt[5]{4}$;

б) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500}=\sqrt[4]{625\cdot 4}=\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{4}=5\cdot\sqrt[4]{2^2}=5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b^3\cdot b}=\sqrt[3]{a^9\cdot b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}=a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b},\ \text{если}\ a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt[2n]{b}=-\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{8}{25}}, a<0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{b}{25}}=\sqrt{\frac{25a^2b}{25}}=\sqrt{a^2b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $\sqrt{a^2b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^k\cdot b^{n-k}}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}.\ \text{Если}\ a\geq 0,\ b>0,$$

Пример. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5}{5^2\cdot 5}}=\frac{\sqrt[3]{3\cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{15}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Ответ: $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени n»

Ответом на задания 1–18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

1. Вычислите $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Ответ: ________________________________.

2. Вычислите $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$.

Ответ: ________________________________.

3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$.

Ответ: ________________________________.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Ответ: ________________________________.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Ответ: ________________________________.

6. Вычислите $\sqrt{3}(\sqrt{12}-2\sqrt{27})$.

Ответ: ________________________________.

7. Вычислите $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$.

Ответ: ________________________________.

8. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$.

Ответ: ________________________________.

9. Вычислите $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.

Ответ: ________________________________.

10. Вычислите $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}}$.

Ответ: ___________________________.

11. Вычислите $\sqrt[3]{0,027\cdot125}+\sqrt[4]{256\cdot0,0081}$.

Ответ: ___________________________.

12. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{125}{1000}}-\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$.

Ответ: ___________________________.

13. Вычислите $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}-\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Ответ: ___________________________.

14. Вычислите $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}+\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: ___________________________.

15. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0,3^{10}\cdot2^{15}}$.

Ответ: ___________________________.

16. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}\cdot4^{30}}$.

Ответ: ___________________________.

17. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

Ответ: ___________________________.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Ответ: ___________________________.

1.2. Степень с рациональным показателем

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

n-й натуральной степенью действительного числа a называется действительное число b, получаемое в результате умножения числа a самого на себя n раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

n-ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in Z$).

$$0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^1 = a.$$

Например:
$5^1 = 5$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).
Например:

$8^{-1} = \dfrac{1}{8}$; $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$;

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in N$, $m > 2$, $n \in Z$.

Например:

$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$;

$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

$a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.
Например:

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$; $(-5)^{\frac{1}{3}}$ — не определено.

1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q} \ (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).}$$

Пример 1. Представьте выражение в виде степени:

а) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = b^{\frac{7}{6}}$;

б) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^0 = 1$ при $x \neq 0$.

Пример 2. Вычислите:

а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$.

Решение.

а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$;

б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 5^1 = 5$.

Пример 3. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\cdot\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$;

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^{4\cdot\frac{1}{4}}}{2^{4\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$\boldsymbol{a^p : a^q = a^{p-q}; \ \left(a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q}\right) \text{ или } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.}$$

Пример 1. Упростите:

а) $a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{15}} = a^{\frac{1}{5}}$;

б) $y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9}+\frac{1}{6}} = y^{\frac{13}{18}}$;

в) $\frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3-(-0,8)} = z^{-0,3+0,8} = z^{0,5}$.

Пример 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7}\cdot\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2}\cdot\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^{\frac{7}{7}}\cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \frac{2\cdot 2}{9\cdot 4} = \frac{1}{9}.$$