

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра	7
1. Множества. Операции над множествами	8
2. Числовые множества.	9
3. Законы сложения и умножения	10
4. Простые и составные числа	11
5. Признаки делимости.	12
6. Дроби. Действия с дробями	13
7. Средние величины. Проценты	15
8. Модуль числа. Свойства модуля	17
9. Пропорции	18
10. Формулы сокращённого умножения.	19
11. Степени	21
12. Логарифмы.	22
13. Арифметический корень.	23
14. Прогрессии	25
15. Основы тригонометрии	26
16. Свойства тригонометрических функций	27
17. Тригонометрические формулы	28
18. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение	30
19. Линейные уравнения	32
20. Квадратные уравнения.	33
21. Решение различных квадратных уравнений	34
22. Теорема Виета	35
23. Рациональные и иррациональные уравнения	36
24. Показательные уравнения.	37
25. Логарифмические уравнения	38
26. Тригонометрические уравнения	39
27. Системы уравнений с двумя переменными.	40
28. Числовые неравенства	42
29. Линейные неравенства.	43
30. Квадратные неравенства	44
31. Рациональные неравенства	46
32. Иррациональные неравенства	47

33. Показательные неравенства	48
34. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	49
35. Логарифмические неравенства	50
Функция и её свойства. Виды функций	51
36. Функция	52
37. Область определения некоторых функций	53
38. Чётные и нечётные функции.	54
39. Периодичность функции	55
40. Нули и знаки функции.	56
41. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания функции.	57
42. Обратная функция	58
43. Преобразование графиков	59
44. Линейная функция и её график.	61
45. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость	63
46. Квадратичная функция	64
47. Степенная функция	66
48. Показательная функция	68
49. Логарифмическая функция.	69
50. Тригонометрическая функция $y = \sin x$	70
51. Тригонометрическая функция $y = \cos x$	71
52. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{tg} x$	72
53. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{ctg} x$	73
54. Обратные тригонометрические функции.	74
Начала математического анализа	77
55. Предел.	78
56. Производная функции	79
57. Правила дифференцирования.	81
58. Производная основных элементарных функций.	82
59. Использование производной для исследования функций	83
60. Простейшие дифференциальные уравнения	85
61. Первообразная и интеграл.	86
62. Таблица первообразных (неопределённых интегралов)	87
63. Определённый интеграл	88
64. Применение определённого интеграла	89

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	91
65. Метод математической индукции. Элементы статистики	92
66. Комбинаторика	93
67. Выбор формулы для решения комбинаторных задач	96
68. Элементы теории вероятностей	97
Геометрия	99
69. Углы на плоскости	100
70. Углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой	101
71. Расположение прямых на плоскости	102
72. Треугольник	104
73. Признаки равенства треугольников	105
74. Признаки равенства прямоугольных треугольников	106
75. Подобие треугольников	107
76. Элементы треугольника и зависимости в нём	109
77. Радиусы вписанной окружности в треугольник и описанной около него	110
78. Площадь треугольника	111
79. Теоремы синусов и косинусов	112
80. Медианы, высоты, биссектрисы треугольника	113
81. Равнобедренный, равносторонний, прямоугольный треугольники	115
82. Вписанные и центральные углы	116
83. Взаимное расположение прямой и окружности	118
84. Четырёхугольник	120
85. Параллелограмм	121
86. Прямоугольник, ромб, квадрат	122
87. Трапеция	123
88. Многоугольник	124
89. Правильные многоугольники	125
90. Окружность и круг	126
91. Прямые и плоскости в пространстве	127

92. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость	128
93. Призма	129
94. Параллелепипед	130
95. Пирамида	131
96. Тела вращения. Цилиндр. Конус	133
97. Тела вращения. Сфера и шар	135
98. Прямоугольная декартова система координат . .	136
99. Векторы на плоскости	139
100. Векторы в пространстве	141

АЛГЕБРА

1. Множества. Операции над множествами.
2. Числовые множества.
3. Законы сложения и умножения.
4. Простые и составные числа.
5. Признаки делимости.
6. Дроби. Действия с дробями.
7. Средние величины. Проценты.
8. Модуль числа. Свойства модуля.
9. Пропорции.
10. Формулы сокращённого умножения.
11. Степени.
12. Логарифмы.
13. Арифметический корень.
14. Прогрессии.
15. Основы тригонометрии.
16. Свойства тригонометрических функций.
17. Тригонометрические формулы.
18. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.
19. Линейные уравнения.
20. Квадратные уравнения.
21. Решение различных квадратных уравнений.
22. Теорема Виета.
23. Рациональные и иррациональные уравнения.
24. Показательные уравнения.
25. Логарифмические уравнения.
26. Тригонометрические уравнения.
27. Системы уравнений с двумя переменными.
28. Числовые неравенства.
29. Линейные неравенства.
30. Квадратные неравенства.
31. Рациональные неравенства.
32. Иррациональные неравенства.
33. Показательные неравенства.
34. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
35. Логарифмические неравенства.



1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

- **Понятие множества.** Множество — это совокупность некоторых объектов, объединённых по одному какому-либо признаку.

- **Элемент множества** — каждый объект, входящий в множество.

(Элемент a принадлежит множеству A .)

(Элемент b не принадлежит множеству A .)

$$a \in A$$

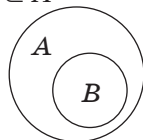
$$b \notin A$$

- **Пустое множество** — множество, которое не содержит ни одного элемента.

$$\emptyset$$

- Множество B является **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

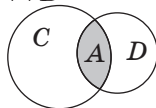
$$B \subset A$$



Если $x \in B$,
то $x \in A$.

- **Пересечение множеств** — множество, состоящее из элементов, принадлежащих как одному, так и другому множеству, т. е. общая часть множеств.

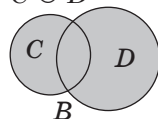
$$C \cap D$$



$C \cap D = A$,
 $x \in A \Leftrightarrow x \in C$
и $x \in D$.

- **Объединение множеств** — множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

$$C \cup D$$

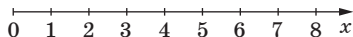


$C \cup D = B$,
 $x \in B \Leftrightarrow x \in C$
и $x \in D$.



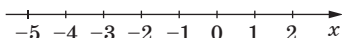
2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

- **Натуральные числа** — целые положительные числа, т. е. числа, которые используются при счёте предметов.



N

- **Целые числа** — множество, состоящее из натуральных чисел, их противоположных, и число 0.



Z

- **Рациональные числа** — множество чисел, которые можно представить в виде

несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое

число, n — натуральное число или в виде бесконечной периодической десятичной

дроби: $\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0,(6)$.

Q

- **Иррациональные числа** — множество чисел, которые нельзя представить в виде

дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (или можно

представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби):

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

- **Действительные числа** — множество чисел, состоящее из всех рациональных и иррациональных чисел.

R

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$



3. ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

● Переместительный (коммутативный):

➤ закон сложения: $a + b = b + a$.

➤ закон умножения: $a \cdot b = b \cdot a$.

● Сочетательный (ассоциативный):

➤ закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

➤ закон умножения: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

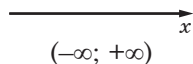
● Распределительный (дистрибутивный) закон умножения:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

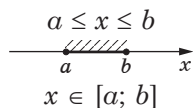
$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Обозначение некоторых числовых множеств

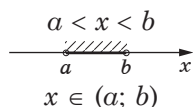
1. Числовая (координатная) прямая.



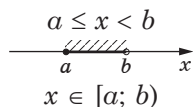
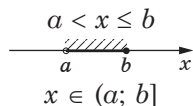
2. Закрытый промежуток (отрезок) с концами a и b ($a < b$).



3. Открытый промежуток (интервал) с концами a и b ($a < b$).



4. Полуоткрытый промежуток с концами a и b ($a < b$).





4. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

- **Простым** называется такое число, у которого только два натуральных делителя — 1 и само это число.

Простых чисел бесконечно много; существует таблица простых чисел до 997.

Простые числа: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; ...

2 (делители: 1; 2)

37 (делители: 1; 37)

2 — наименьшее простое число

- **Составным** называется такое число, которое имеет больше двух натуральных делителей.

Составные числа:

8 (делители: 1; 8; 2; 4);

21 (делители: 1; 21; 3; 7).



1 не является ни простым, ни составным числом.

- **Наибольший общий делитель (НОД)** нескольких чисел — это наибольшее число, на которое делятся нацело данные числа.

$$\text{НОД}(12; 8) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & \underline{2} & 8 & \underline{2} \\ 6 & \underline{2} & 4 & \underline{2} \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- **Наименьшее общее кратное (НОК)** нескольких чисел — это наименьшее число, которое само делится нацело на каждое из данных чисел.

$$\text{НОК}(12; 8) = 12 \cdot 2 = 24$$



Наименьшее кратное числа и наибольший делитель числа — само это число. Наибольшего кратного числа не существует.



5. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

- | | | |
|--|--|---|
| ➤ На 2 делятся числа, которые оканчиваются нулём или чётной цифрой. | | 2 <u>0</u> ; 40 <u>8</u> ; 100; 18 <u>6</u> . |
| ➤ На 3 делятся те числа, сумма цифр которых делится на 3. | | 903
(9 + 0 + 3 = 12);
2727
(2 + 7 + 2 + 7 = 18). |
| ➤ На 5 делятся числа, оканчивающиеся цифрой 5 или нулём. | | 25 <u>0</u> ; 48 <u>5</u> ; 1 <u>5</u> . |
| ➤ На 8 делятся числа, три последние цифры которых 000 или являются числом, делящимся на 8. | | 147 <u>000</u> ; 147 <u>984</u> .
(984 : 8 = 123). |
| ➤ На 9 делятся числа, сумма цифр которых делится на 9. | | 207 (2 + 0 + 7 = 9);
102 357
(1 + 0 + 2 + 3 +
+ 5 + 7 = 18). |
| ➤ На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулём. | | 2 <u>0</u> ; 370 <u>0</u> ;
11 219 <u>000</u> . |
| ➤ На 11 делятся числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечётных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на чётных местах, на число, которое делится на 11. | | 594 638
(5 + 4 + 3 = 12
9 + 6 + 8 = 23
23 - 12 = 11). |
| ➤ На 25 делятся числа, у которых две последние цифры 00 или являются числом, делящимся на 25 (25; 50; 75). | | 12 <u>00</u> ; 372 <u>5</u> ;
40 9 <u>75</u> . |



Взаимно простыми называются числа, наибольший общий делитель которых равен 1.

3 и 8 — взаимно простые, т. к. НОД(3; 8) = 1

a — кратное числу b

b — делитель числа a

$k \neq 0$, $a : b$, тогда $ak : bk$

$a : b = c$,

c — целое число.



6. ДРОБИ. ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

- **Знаменатель** дроби показывает, на сколько равных частей разделили величину, а **числитель** дроби показывает, сколько таких частей взяли.

$$\begin{array}{l|l} b \text{ — знаменатель дроби} & \frac{a}{b} \\ a \text{ — числитель дроби} & \end{array}$$

➤ **Основное свойство дроби:** $b \neq 0, c \neq 0.$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c}.$$

➤ Сокращение дробей.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}.$$

➤ Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

$b \neq 0$

- Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.

Наименьший общий знаменатель нескольких дробей — наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей.

Алгоритм:

1. Привести дроби к наименьшему общему знаменателю.
2. Сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями.
3. Полученную дробь сократить, выделить целую часть, если это возможно.

Например.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12} = 1 \frac{7}{12};$$

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{5} = \frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{40-18}{45} = \frac{22}{45}.$$

➤ **Умножение:**
 $b \neq 0, d \neq 0, n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

➤ **Деление:**
 $b \neq 0, d \neq 0, n \neq 0$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

● **Взаимно обратные числа** — числа, произведение которых равно 1.

$$\frac{3}{7} \text{ и } \frac{7}{3} \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1 \right); \quad 15 \text{ и } \frac{1}{15} \left(15 \cdot \frac{1}{15} = 1 \right).$$

➤ Основные задачи на дроби.

1. Найти дробь $\frac{a}{b}$ от числа d .

$$\frac{a}{b} \cdot d$$

2. Найти число по значению дроби. Найти число, если $\frac{m}{n}$ его составляет d .

$$d : \frac{m}{n}$$

➤ Запись смешанного числа в виде неправильной дроби

$$2\frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{17}{7}$$

➤ Правильная дробь

$$\frac{a}{b}, \text{ если } a < b.$$

➤ Неправильная дробь

$$\frac{a}{b}, \text{ если } a \geq b.$$

➤ Сложение (вычитание) смешанных чисел

$$3\frac{4}{11} - 2\frac{2}{11} = (3-2) + \left(\frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) = 1\frac{2}{11};$$

$$3\frac{4}{11} + 2\frac{2}{11} = (3+2) + \left(\frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) = 5\frac{6}{11}.$$

➤ Умножение (деление) смешанных чисел

$$1\frac{5}{6} \cdot 2\frac{4}{5} = \frac{12 \cdot 14^2}{1 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4,8;$$

$$3\frac{1}{8} : 1\frac{1}{24} = \frac{25}{8} : \frac{25}{24} = \frac{25^1 \cdot 24^3}{1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 25} = \frac{3}{1} = 3$$



7. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПРОЦЕНТЫ

- **Среднее арифметическое**
 $n \in \mathbb{Z}$; a_1, a_2, \dots, a_n — любые числа.

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

- **Среднее геометрическое**
 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

- **Среднее гармоническое**
 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$;
 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

- **Среднее квадратичное**
 a_1, a_2, \dots, a_n — любые числа,
 $n \in \mathbb{N}$.

$$S = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

- **Общее соотношение между средними**
 $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$.
При $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ достигается равенство.

$$S \geq A_n \geq G_n \geq H_n.$$

- **1 % — сотая часть числа.**

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

- **Нахождение процентов от числа p % от числа A .**

$$\frac{p}{100} \cdot A.$$

- **Нахождение числа по значению его процентов.**
Если p % от числа равняется B , то все числа равны.

$$B : \frac{p}{100} = \frac{B \cdot 100}{p}.$$

- **Нахождение процентного отношения двух чисел.**
Число a составляет x % от числа b .

$$x = \frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

- ↗ Сложные проценты.
 A_n — наращенный капитал;
 A_0 — начальный капитал;
 p — процентная ставка;
 n — количество лет для
 вклада.

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

- ↗ Таблица простых чисел (до 997).

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997