СОДЕРЖАНИЕ

1. Числа и вычисления

Знать:
- определение натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;
- признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и 10;
- единицы измерения различных величин;
- зависимости между величинами в виде формул;
- отношения, пропорции, проценты;
- определения квадратного и кубического корня из числа.

Уметь:
- выполнять арифметические действия над рациональными числами;
- переходить от одной формы записи чисел к другой;
- округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел, выполнять оценку результата;
- решать текстовые задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, дробями, процентами;
- выполнять преобразование выражений, содержащих квадратный и кубический корень из чисел.

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация

Натуральными называют числа, которые используются для счета предметов — 1, 2, 3, 4, ... (число 0 не является натуральным).

Множество натуральных чисел обозначают N.

Запись «$3 \in \mathrm{N}$» означает, что число три принадлежит множеству натуральных чисел, а запись «$0 \notin \mathrm{N}$» означает, что число нуль не принадлежит этому множеству.

Десятичная система счисления — позиционная система счисления по основанию 10.

Целое число A в десятичной системе счисления записывается в виде конечной линейной комбинации степеней числа 10.

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0} = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10^1 + a_0,$$

где $a_{n-1}\ldots a_0$ — цифры числа, причем $a_{n-1} \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$.

Пример 1. $5\,783 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

В **римской нумерации** цифры записывают с помощью букв латинского алфавита:

1 — I	8 — VIII
2 — II	9 — IX
3 — III	10 — X
4 — IV	50 — L
5 — V	100 — C
6 — VI	500 — D
7 — VII	1000 — M

Пример 2. Записать числа, используя римскую нумерацию.

222 — CCXXII;
444 — CDXLIV;
555 — DLV;
545 — DXLV;
689 — DCLXXXIX;
1145 — MCXLV.

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Для натуральных чисел определены следующие действия: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень*, *извлечение корня*.

Первые четыре действия являются арифметическими.

Пусть a, b и c — натуральные числа.

Законы сложения	Равенство
Переместительный	$a + b = b + a$
Сочетательный	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Законы умножения	Равенство
Переместительный	$ab = ba$
Сочетательный	$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$

Распределительный закон: $a(b + c) = ab + ac$.

Действия с нулем и единицей

$\boxed{a + 0 = a}$ $\boxed{a : 1 = a}$ $\boxed{0 : a = 0}$

$\boxed{a \cdot 0 = 0}$ $\boxed{a : a = 1}$ $\boxed{\cancel{a : 0}\text{ — на 0 делить нельзя}}$

Пример 1. Используя законы сложения и умножения, вычислить устно значения выражений:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5$;
б) $125 \cdot 77 \cdot 8$;
в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4$;
г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17$;
д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6$.

Решение:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 137 = 10 \cdot 137 = 1370$;
б) $125 \cdot 77 \cdot 8 = 77 \cdot (125 \cdot 8) = 77 \cdot 1000 = 77\,000$;
в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (136 \cdot 10) = 100 \cdot 10 \cdot 1360 = 1\,360\,000$;
г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17 = 17 \cdot (73 + 27) = 17 \cdot 100 = 1700$;
д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6 = 4 \cdot (63 + 79) + 142 \cdot 6 = 4 \cdot 142 + 142 \cdot 6 = 142 \times (4 + 6) = 142 \cdot 10 = 1420$.

1.1.3. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из который равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

где a — основание степени, n — показатель степени.

Степенью числа a с показателем 1 является само число a.

Вычисление значения степени называют действием **возведение в степень.**

Свойства степени с натуральным показателем ($m \in$ N; $n \in$ N)

Свойства	Примеры
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
$a^m : a^n = a^{m-n}$; $m > n$, $a \neq 0$	$7^4 : 7^3 = 7^1 = 7$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	а) $(2a)^7 = 2^7 \cdot a^7 = 128a^7$; б) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\ 000$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$	а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}$; б) $\dfrac{125^3}{25^3} = \left(\dfrac{125}{25}\right)^3 = 5^3 = 125$

Пример 1. Вычислить: $\dfrac{17^9 \cdot 2^{12} \cdot 5^6}{17^8 \cdot 5^4 \cdot 2^{10}}$.

Решение:

$$\frac{17^9}{17^8} \cdot \frac{2^{12}}{2^{10}} \cdot \frac{5^6}{5^4} = 17^{9-8} \cdot 2^{12-10} \cdot 5^{6-4} = 17 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 17 \cdot (2 \cdot 5)^2 =$$
$$= 17 \cdot 10^2 = 17 \cdot 100 = 1700.$$

Пример 2. Найти значение выражения: $\dfrac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}}$.

Решение:

$$\frac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}} = \frac{(3 \cdot 2)^{2n} \cdot 16}{(3^2)^n \cdot 2^{2n+4}} = \frac{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 16}{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^4} = \frac{16}{16} = 1.$$

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое a делится без остатка.

Пример 1. Число 12 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Число 1 является делителем любого натурального числа.

Натуральное число называется **простым**, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

Число, имеющее более двух делителей, называется **составным**.

Пример 2. Числа 2, 3, 11, 23 — простые числа; числа 4, 8, 15, 27 — составные.

Признак делимости произведения нескольких чисел: если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Пример 3. Произведение $24 \cdot 15 \cdot 77$ делится на 12, поскольку множитель этого числа 24 делится на 12.

Признак делимости суммы (разности) чисел: если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число.

Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a+c) \vdots b$.

Здесь a, b и c — натуральные числа, знак «$\vdots$» — делится.

Пример 4. Число $(77+99) \vdots 11$, поскольку $77 \vdots 11$ и $99 \vdots 11$.

Если $a \vdots b$, а c не делится на b, то $a + c$ не делится на число b.

Пример 5. $21 \vdots 3$, а 22 не делится на 3. Это значит, что (21 + 22) не делится на 3.

Пример 6. Исходя из того, что $25 \vdots 5$ и $(25+15) \vdots 5$, делаем вывод, что $15 \vdots 5$.

Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.

Пример 7. Исходя из того, что $72 \vdots 24$ и $24 \vdots 12$, делаем вывод, что $72 \vdots 12$.

Представление числа в виде произведения степеней простых чисел называют **разложением числа на простые множители.**

Основная теорема арифметики: любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители только одним способом.

При разложении числа на простые множители используют *признаки делимости* и применяют запись «столбиком», при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример 8. Разложить на простые множители числа: а) 339; б) 1197.

Решение:

а)
$$\begin{array}{r|l} 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$
$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11;$

б)
$$\begin{array}{r|l} 1197 & 3 \\ 399 & 3 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$
$1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19.$

1.1.5. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Делится на	Признак делимости	Примеры
2	Число делится на 2, если его **последняя цифра** делится на 2	$27\,374 \vdots 2$ 27 371 не делится на 2
3	Число делится на 3, если **сумма его цифр** делится на 3	$27\,375 \vdots 3$, поскольку $2 + 7 + 3 + 7 + 5 = 24$. $24 \vdots 3$
5	Число делится на 5, если его **последняя цифра** 0 или 5	$23\,330 \vdots 5$ $10\,745 \vdots 5$ 48 377 не делится на 5
9	Число делится на 9, если **сумма его цифр** делится на 9	$488\,718 \vdots 9$, поскольку $4 + 8 + 8 + 7 + 1 + 8 = 36$. $36 \vdots 9$
10	Число делится на 10, если его **последняя цифра** 0	$270 \vdots 10$ 272 не делится на 10

Признаки делимости на 4, 25 и 11

Делится на	Признак делимости	Примеры
4	Число делится на 4, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 4	27 032⋮4, поскольку 32⋮4
25	Число делится на 25, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 25	3 300, 3 725, 48 375, 3 150 делятся на 25
11	Число делится на 11, если **алгебраическая сумма его цифр** $a_0 - a_1 + a_2 - - a_3 + ... + (-1)^n a_{n-1}$ делится на 11	38 137⋮11, поскольку $3 - 8 + 1 - 3 + 7 = 0$. 0⋮11

Существуют признаки делимости на 6, 15, 45 и т. д., т. е. на числа, произведение которых можно разложить на множители 2, 3, 5, 9 и 10.

Пример 1. Признак делимости на 6 может выглядеть так: на 6 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 и их последняя цифра делится на 2.

Пример 2. Указать наибольшее натуральное число, делящееся на 5 и удовлетворяющее неравенству:
а) $128 < x < 145$; б) $1157 < x \leq 1160$.
Ответ: а) 140; б) 1160.

Пример 3. На одной стоянке 26 автомобилей, на другой — на 1 больше, а на третьей — в 2 раза больше, чем на первой. Можно ли все автомобили разместить поровну на трех стоянках?
Ответ: можно, поскольку общее число автомобилей: $26 + (26 + 7) + 26 \cdot 2 = 111$. 111⋮3, т. к. $1+1+1 = 3$⋮3.

1.1.6. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называется **наибольшим общим делителем этих чисел (НОД)**.

Пример 1. НОД (10; 25) = 5; НОД (18; 24) = 6; НОД (7; 21) = 1.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то эти числа называются **взаимно простыми.**

Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД)

Действие	**Пример.** Найти НОД (180; 840)
1. Разложить данные числа на простые множители	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
2. Выписать все простые числа, которые входят **в каждое** из полученных разложений	НОД (180; 840) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Окончание таблицы

Действие	**Пример.** Найти НОД (180; 840)
Каждое из выписанных простых чисел взять с **наименьшим** из показателей степени, с которыми оно входит в разложение данных чисел	
3. Записать произведение полученных степеней	НОД (180;840) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Пример 2. Найти НОД (132; 180; 144).

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$

НОД (132; 180; 144) = $2^2 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 3. Между учениками одного класса поделили поровну 155 тетрадей и 62 ручки. Сколько учеников в этом классе?

Решение:

Нахождение количества учащихся этого класса сводится к нахождению наибольшего общего делителя чисел 155 и 62, поскольку тетради и ручки поделили поровну.

$$155 = 5 \cdot 31;\ 62 = 2 \cdot 31.\ \text{НОД}\ (155;\ 62) = 31.$$

Ответ: 31 ученик.

Кратным натурального числа a называется натуральное число, которое делится на a без остатка.

Пример 4. Число 8 имеет кратные: 8, 16, 24, 32, ... Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных.

Наименьшим общим кратным (НОК) чисел называется наименьшее натуральное число, которое кратно этим числам.

Алгоритм нахождения наименьшего общего кратного (НОК)

Действие	**Пример.** Найти НОК (84; 90)
1. Разложить числа на простые множители	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
2. Вычислить **все** простые числа, которые входят хотя бы в одно из разложений. Каждое из выписанных простых чисел взять с **наибольшим** показателем степени, с которым оно входит в разложения данных чисел	НОК (84; 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Окончание таблицы

Действие	**Пример.** Найти НОК (84; 90)
3. Записать произведение полученных степеней	НОК (84; 90) = 1260

Пример 5. Найти НОК (18; 24; 30).

Решение:

$$18 = 2 \cdot 3^2;\ 24 = 2^3 \cdot 3;\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$\text{НОК}\ (18;\ 24;\ 30) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$$

Пример 6. Два велосипедиста одновременно стартовали по велотреку в одном направлении. Один делает круг за 1 мин, а другой — за 45 с. Через какое наименьшее количество минут после начала движения они встретятся на старте? Сколько кругов по велотреку сделает каждый из них?

Решение:

Количество минут, через которое они снова встретятся на старте, должно делиться и на 1 мин, и на 45 с. 1 мин = 60 с. Таким образом, необходимо найти НОК (45; 60). $45 = 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. НОК $(45; 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$. Значит, велосипедисты встретятся на старте через 180 с = 3 мин, при этом первый сделает 180 : 60 = 3 круга, а второй — 180 : 45 = 4 круга.
Ответ: 3 мин; 3 круга, 4 круга.

1.1.7. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b, можно выполнить **деление с остатком.** При этом полученное частное называется **неполным.** Справедливо равенство:

$$a = b \cdot n + r,$$

где a — делимое, b — делитель, n — неполное частное, r — остаток.

Пример 1. Пусть делимое равно 243, делитель — 4, тогда 243 : 4 = 60 (остаток 3). То есть $a = 243$, $b = 4$, $n = 60$, $r = 3$, тогда $243 = 60 \cdot 4 + 3$.

Числа, которые делятся на 2 без остатка, называются **четными:**

$$a = 2n,\ n \in \mathrm{N}.$$

Остальные числа называются **нечетными:**

$$b = 2n + 1,\ n \in \mathrm{N}.$$

1.2. Дроби

1.2.1. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей

Одна или несколько равных частей единицы называются **обыкновенной дробью.**

Пример 1. Дробь $\dfrac{3}{7}$ означает, что единицу разделили на 7 частей и взяли 3 таких части.

Дробь можно рассматривать и как результат деления натуральных чисел. Частное от деления натуральных чисел a и b можно записать в виде дроби $\frac{a}{b}$, где делимое a — **числитель**, а делитель b — **знаменатель**.

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется **правильной**, а дробь, где числитель больше или равен знаменателю, — **неправильной**.

Пример 2. Дроби $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{123}{124}$ — правильные, дроби $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{1}$ — неправильные.

Число, состоящее из целой и дробной частей, можно **обратить в неправильную дробь.** Для этого нужно умножить целую часть на знаменатель и к произведению прибавить числитель данной дроби. Полученная сумма будет числителем дроби, а знаменателем остается знаменатель дробной части.

Пример 3. $5\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{16}{3}$; $8\frac{9}{10} = \frac{8 \cdot 10 + 9}{10} = \frac{89}{10}$.

Из любой **неправильной дроби можно выделить целую часть.** Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления — это *целая часть*, остаток — это *числитель*, делитель — это *знаменатель*.

Пример 4. $\frac{23}{4} = \left[23 : 4 = 5 \text{ (ост. 3)}\right] = 5\frac{3}{4}$; $\frac{7}{3} = \left[7 : 3 = 2 \text{ (ост. 1)}\right] = 2\frac{1}{3}$.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дроби используют при сокращении дробей.

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от единицы, называют **сокращением дробей.**

Пример 5. Наибольшим общим делителем дроби $\frac{225}{275}$ является число 25, поэтому дробь можно сократить на это число: $\frac{225}{275} = \frac{225 : 25}{275 : 25} = \frac{9}{11}$.

Сокращение дробей можно проводить поэтапно с помощью признаков делимости.

Пример 6. $\frac{48}{60} = \frac{48 : 2}{60 : 2} = \frac{24}{30} = \frac{24 : 2}{30 : 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$.

Сравнение дробей

1. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

Пример 7. $\frac{3}{11} < \frac{5}{11}$; $\frac{2}{37} > \frac{1}{37}$; $\frac{11}{101} < \frac{9}{101}$.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

Пример 8. $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$; $\frac{11}{35} < \frac{11}{20}$; $\frac{31}{45} > \frac{31}{46}$.

Чтобы **сравнить дроби с разными числителями и знаменателями**, нужно:
1) привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
2) сравнить полученные дроби.

Чтобы **привести дроби к наименьшему общему знаменателю**, нужно:
1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей (оно и будет их общим знаменателем);
2) разделить общий знаменатель на знаменатель данных дробей, т. е. найти для каждой дроби дополнительный множитель;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

Пример 9. Сравнить дроби: а) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{18}$ и $\frac{11}{27}$.

Решение:

а) НОК (7; 5) = 35. $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{10}{35}$; $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35}$; так как $\frac{10}{35}<\frac{21}{35}$, то $\frac{2}{7}<\frac{3}{5}$;

б) НОК (18; 27) = 54; $\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 3}{18\cdot 3}=\frac{21}{54}$; $\frac{11}{27}=\frac{11\cdot 2}{27\cdot 2}=\frac{22}{54}$; так как $\frac{21}{54}<\frac{22}{54}$, то $\frac{7}{18}<\frac{11}{27}$.

1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Сложение и вычитание дробей

1. При **сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями** к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой вычитают числитель второй) и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если возможно, сокращают и выделяют целую часть.

Пример 1.

а) $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$;

б) $\frac{9}{11}+\frac{2}{11}=\frac{11}{11}=1$;

в) $2\frac{3}{17}+5\frac{4}{17}=(2+5)+\frac{3+4}{17}=7\frac{7}{17}$;

г) $4\frac{10}{13}+2\frac{5}{13}=6\frac{15}{13}=6+\frac{13}{13}+\frac{2}{13}=7\frac{2}{13}$;

д) $7\frac{11}{15}-2\frac{4}{15}=(7-2)+\frac{11-4}{15}=5\frac{7}{15}$;

е) $8\frac{3}{22}-5\frac{7}{22}=(8-5)+\frac{3-7}{22}=3+\frac{3-7}{22}=2+\frac{22}{22}+\frac{3-7}{22}=$
$=2\frac{22+3-7}{22}=2\frac{18}{22}=2\frac{9}{11}$.

2. При **сложении (вычитании) дробей с разными знаменателями** нужно предварительно привести эти дроби к наименьшему общему знаменателю, затем

сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 2.

а) $5\frac{7}{8}+6\frac{3}{10}=5+6+{}^{5/}\frac{7}{8}+{}^{4/}\frac{3}{10}=11+\frac{35+12}{40}=11+\frac{47}{40}=11+\frac{40}{40}+\frac{7}{40}=$

$=12+\frac{7}{40}=12\frac{7}{40}$;

б) $3\frac{9}{11}-1\frac{2}{5}=3-1+{}^{5/}\frac{9}{11}-{}^{11/}\frac{2}{5}=2+\frac{45-22}{45}=2\frac{23}{45}$;

в) $5\frac{1}{4}-1\frac{3}{8}=5-1+{}^{2/}\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=4+\frac{2-3}{8}=3+\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=3\frac{7}{8}$;

г) $7\frac{7}{9}-4\frac{1}{12}+2\frac{3}{4}=7-4+2+{}^{4/}\frac{7}{9}-{}^{3/}\frac{1}{12}+{}^{9/}\frac{3}{4}=5+\frac{28-3+27}{36}=$

$=5+\frac{52}{36}=5+\frac{13}{9}=5+\frac{9}{9}+\frac{4}{9}=6\frac{4}{9}$.

Умножение дробей

1. Произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

2. При умножении чисел, состоящих из целой и дробной частей, их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем умножают согласно п. 1.

Пример 3.

а) $\frac{7}{12}\cdot 24=\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{1}=\frac{7\cdot\cancel{24}^{2}}{\cancel{12}^{1}\cdot 1}=\frac{14}{1}=14$;

б) $\frac{13}{24}\cdot\frac{16}{39}=\frac{\cancel{13}^{1}\cdot\cancel{16}^{2}}{\cancel{24}^{3}\cdot\cancel{39}^{3}}=\frac{2}{9}$;

в) $19\frac{1}{2}\cdot 1\frac{5}{9}=\frac{19\cdot 2+1}{2}\cdot\frac{1\cdot 9+5}{9}=\frac{\cancel{39}^{13}\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{9}^{3}}=\frac{91}{3}=30\frac{1}{3}$;

г) $2\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{24}\cdot 5\frac{2}{5}=\frac{\cancel{8}^{1}\cdot\cancel{25}^{1}\cdot\cancel{27}^{9}}{\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{24}^{3}\cdot\cancel{25}^{1}}=\frac{9}{3}=3$;

д) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3}=\frac{27}{343}$;

е) $\left(3\frac{1}{4}\right)^{2}=\left(\frac{13}{4}\right)^{2}=\frac{169}{16}=10\frac{9}{16}$.

Деление дробей

Два числа называются **взаимно обратными**, если их произведение равно 1, т. е. дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными, например $\frac{1}{3}$ и 3; $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно делимое умножить на число, обратное к делителю:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

$1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$; $\quad 0:\frac{a}{b}=0$; $\quad \cancel{\frac{a}{b}:0}$ — на нуль делить нельзя

При делении чисел, состоящих из целой и дробной части, нужно предварительно представить их в виде дроби и применить правило согласно п. 1.

Пример 4.

а) $\frac{21}{40}:\frac{3}{4}=\frac{\cancel{21}^{7}\cdot\cancel{4}^{1}}{\cancel{40}^{10}\cdot\cancel{3}^{1}}=\frac{7}{10}$;

б) $8:\frac{3}{5}=\frac{8}{1}\cdot\frac{5}{3}=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$;

в) $\frac{12}{25}:4=\frac{12}{25}:\frac{4}{1}=\frac{\cancel{12}^{3}\cdot 1}{25\cdot\cancel{4}^{1}}=\frac{3}{25}$;

г) $5\frac{1}{3}:1\frac{5}{9}=\frac{16}{3}:\frac{14}{9}=\frac{\cancel{16}^{3}\cdot\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}^{2}\cdot\cancel{14}^{7}}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$;

д) $3\frac{3}{8}:\frac{3}{8}:1\frac{3}{7}=\frac{27}{8}:\frac{3}{8}:\frac{10}{7}=\frac{\cancel{27}^{9}\cdot\cancel{8}^{1}\cdot 7}{\cancel{8}^{1}\cdot\cancel{3}^{1}\cdot 10}=\frac{63}{10}=6\frac{3}{10}$.

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части

Нахождение части от целого (дроби от числа)

Чтобы найти **часть от целого**, нужно число, соответствующее целому, разделить на знаменатель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на числитель той же дроби.

Пример 1. На участке растет 36 деревьев. Из них $\frac{5}{9}$ — вишни. Сколько вишен растет на участке?

Решение:

1) 36 : 9 = 4 (дерева) — это $\frac{1}{9}$ всех деревьев; 2) 4 · 5 = 20 (деревьев) — это $\frac{5}{9}$ всех деревьев.

Ответ: 20 деревьев.

Задача нахождения части от целого по существу является задачей нахождения **дроби от числа**.

Чтобы найти **дробь (часть) от числа**, необходимо число **умножить** на эту дробь.

Пример 2. Решим предыдущую задачу умножением числа 36 на дробь $\frac{5}{9}$.

Решение:

$$36 \cdot \frac{5}{9} = \frac{36 \cdot 5}{9} = 20 \text{ (деревьев).}$$

Ответ: 20 деревьев.

Пример 3. Среди 420 000 жителей города $\frac{1}{6}$ часть жителей не интересуется футболом и не смотрит футбольные матчи по телевизору. Остальные являются футбольными болельщиками. Среди болельщиков $\frac{5}{7}$ смотрит по телевизору финальный матч чемпионата Европы. Сколько жителей города не смотрело этот матч?

Решение:

1) $420\,000 \cdot \frac{1}{6} = 70\,000$ (жителей) — не интересуются футболом;

2) 420 000 − 70 000 = 350 000 (жителей) — футбольные болельщики;

3) $350\,000 \cdot \frac{5}{7} = 250\,000$ (жителей) — смотрели матч;

4) 420 000 − 250 000 = 170 000 — не смотрели матч.

Ответ: 170 000 человек.

Нахождение целого по его части (числа по его дроби)

Чтобы найти **целое по его части**, нужно число, соответствующее этой части, разделить на числитель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на знаменатель той же дроби.

Пример 4. За первый день лыжники прошли 38 км, что составляет $\frac{2}{7}$ длины маршрута. Какова длина маршрута?

Решение:

1) 38 : 2 = 19 (км) — это $\frac{1}{7}$ всего маршрута;

2) 19 · 7 = 133 (км) — длина маршрута.

Ответ: 133 км.

Задача нахождения целого по его части по существу является задачей **нахождения числа по его дроби**.

Чтобы найти **число по его дроби**, необходимо данное значение **разделить** на эту дробь.

Пример 5. Решим предыдущую задачу делением числа 38 на $\frac{2}{7}$.

Решение:

$$38 : \frac{2}{7} = \frac{38 \cdot 7}{2} = 133 \text{ (км).}$$

Ответ: 133 км.

Пример 6. Трое мышей нашли головку сыра. Одна мышь съела $\frac{7}{12}$ головки сыра, другая — $\frac{7}{15}$ остатка, а третья — остальные $1\frac{2}{3}$ кг сыра. Найти массу головки сыра.