

Наглядно

Доступно

И. В. Третьяк

# ГЕОМЕТРИЯ

В схемах  
и таблицах



МОСКВА 2018

УДК 514(03)  
ББК 22.151я2  
Т66

**Третьяк, Ирина Владимировна.**

Т66 Геометрия в схемах и таблицах / И.В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2018. — 128 с. — (Наглядно и доступно).

ISBN 978-5-699-85283-3

В издании в сжатой, концентрированной форме приводится основной теоретический материал, охватывающий школьный курс геометрии. Термины, понятия, теоремы и формулы объединены в наглядные логические модули, позволяющие лучше понять и усвоить информацию.

Пособие окажет учащимся существенную помощь в подготовке к единому государственному экзамену по математике.

УДК 514(03)  
ББК 22.151я2

ISBN 978-5-699-85283-3

© Третьяк И.В., 2016  
© Оформление. ООО «Издательство  
«Эксмо», 2018

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание  
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста  
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

НАГЛЯДНО И ДОСТУПНО

Третьяк Ирина Владимировна

**ГЕОМЕТРИЯ В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ**  
(орыс тілінде)

Ответственный редактор А. Жилинская  
Ведущий редактор Т. Судакова  
Художественный редактор И. Успенский

ООО «Издательство «Эксмо»  
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.  
Home page: [www.eksmo.ru](http://www.eksmo.ru) E-mail: [info@eksmo.ru](mailto:info@eksmo.ru)  
Өндiрушi: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесi, 1 үй.  
Тел.: 8 (495) 411-68-86.  
Home page: [www.eksmo.ru](http://www.eksmo.ru) E-mail: [info@eksmo.ru](mailto:info@eksmo.ru).

Тауар белгісі: «Эксмо»  
Қазақстан Республикасында дистрибутор және өнім бойынша  
арыз-талаптарды қабылдаушының  
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3-а», литер Б, офис 1.  
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: [RDC-Almaty@eksmo.kz](mailto:RDC-Almaty@eksmo.kz)

Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.  
Сертификация туралы ақпарат сайты: [www.eksmo.ru/certification](http://www.eksmo.ru/certification)

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:  
ООО «ТД «Эксмо», 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,  
Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел.: 411-50-74.  
E-mail: [reception@eksmo-sale.ru](mailto:reception@eksmo-sale.ru)

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми  
покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»  
E-mail: [international@eksmo-sale.ru](mailto:international@eksmo-sale.ru)

International Sales: international wholesale customers should contact  
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.  
[international@eksmo-sale.ru](mailto:international@eksmo-sale.ru)

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном  
оформлении, обращайтесь по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2261.  
E-mail: [ivanova.ey@eksmo.ru](mailto:ivanova.ey@eksmo.ru)

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно  
законодательству РФ о техническом регулировании  
можно получить по адресу: <http://eksmo.ru/certification/>  
Өндiрген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 13.12.2017.  
Формат 60x90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,0.  
Доп. тираж 3000 экз. Заказ

ISBN 978-5-699-85283-3

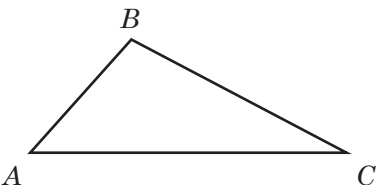


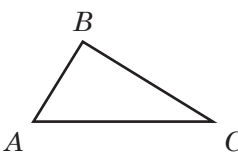
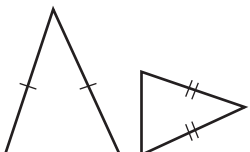
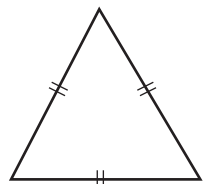
# СОДЕРЖАНИЕ

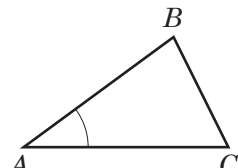
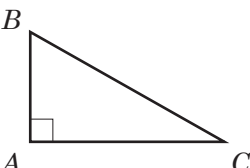
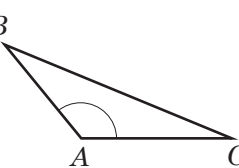
<b>1. Планиметрия</b> .....	4
Треугольник .....	4
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат .....	18
Трапеция .....	22
Окружность и круг .....	25
Многоугольник .....	33
<b>2. Прямые и плоскости в пространстве</b> .....	38
Взаимное расположение двух прямых в пространстве.....	38
<b>3. Многогранники</b> .....	51
Призма .....	51
Параллелепипед .....	54
Куб .....	57
Пирамида .....	57
Сечения куба, призмы, пирамиды .....	64
Правильные многогранники .....	65
<b>4. Тела и поверхности вращения</b> .....	67
Цилиндр .....	67
Конус .....	70
Усечённый конус .....	72
Шар и сфера .....	74
<b>5. Измерение геометрических величин</b> .....	77
Угол. Величина угла, градусная мера угла .....	77
Дуга .....	77
Углы в пространстве .....	78
Длина отрезка, ломаной, окружности.	
Периметр многоугольника .....	81
Расстояние в пространстве .....	82
Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей .....	88
Комбинации тел.....	99
<b>6. Координаты и векторы</b> .....	107
Декартовы координаты.....	107
Векторы .....	118
Операции над векторами .....	121

# 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

## Треугольник

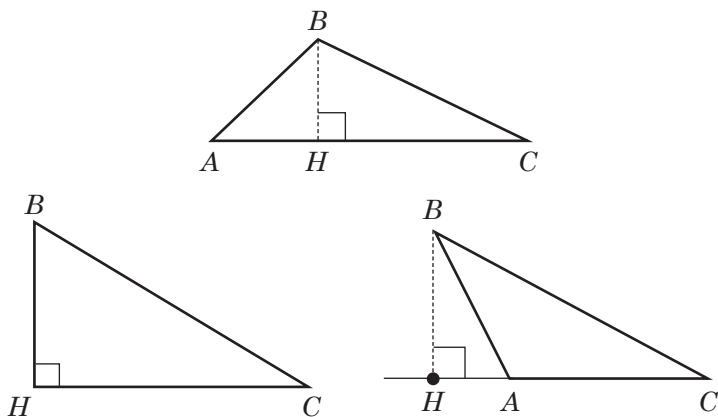
<p><b>Треугольник</b> — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют</p>	 <p><math>\triangle ABC</math>, <math>A, B, C</math> — вершины; <math>AB, BC, AC</math> — стороны</p>
--	--

<p>В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:</p>		
		
<p><b>разносторонний</b> — все его стороны разные</p>	<p><b>равнобедренный</b> — равны две стороны</p>	<p><b>равносторонний (правильный)</b> — все стороны равны</p>

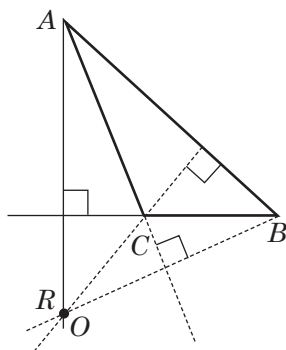
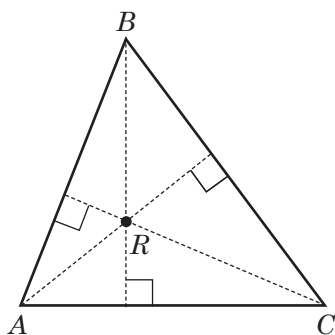
<p>В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:</p>		
		
<p><b>остроугольный</b></p>	<p><b>прямоугольный</b></p>	<p><b>тупоугольный</b></p>

Высота, медиана, биссектриса,  
средняя линия треугольника,  
серединный перпендикуляр к сторонам

**Высота треугольника** — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону



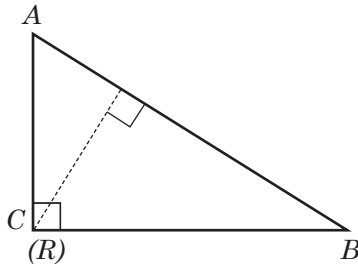
Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром**. Положение ортоцентра  $R$  зависит от вида треугольника



**остроугольный**  
внутри области  
треугольника

**тупоугольный**  
вне области  
треугольника

Окончание таблицы



**прямоугольный** ( $R$  совпадает с  $C$ )

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. То есть **наибольшая** высота проведена к **наименьшей** стороне, а **наименьшая** высота — к **наибольшей** стороне.

**Медиана треугольника** — это отрезок, соединяющий вершину с **серединой** противоположной стороны.

**Свойство медианы треугольника**

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

$$BG : GM = 2 : 1;$$

$$GC : GN = 2 : 1;$$

$$AG : GK = 2 : 1$$

**Задача.**

а)  $GM = 3$  см,  $BM$  — ?

*Решение.*

$GM = 3$  см, тогда  $BG = 6$  см;

$BM = 6 + 3 = 9$  (см).

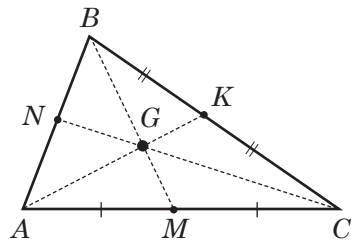
б)  $AG = 12$  см,  $AK$  — ?

*Решение.*

$AG = 12$  см,  $GK = 6$  см,

$AK = 12 + 6 = 18$  (см).

*Ответ:* а) 9 см; б) 18 см.

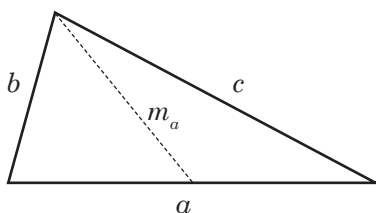


Окончание таблицы

Медианы пересекаются в одной точке, она называется **центром**, или **центром масс**

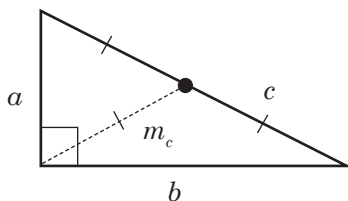
Медиану можно вычислить по формуле:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

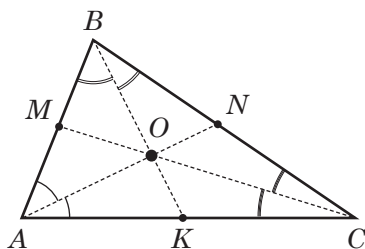


$$m_c = \frac{1}{2}c$$

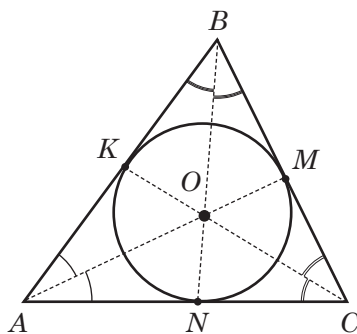
Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна его половине



**Биссектриса угла треугольника** — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и делящий угол пополам

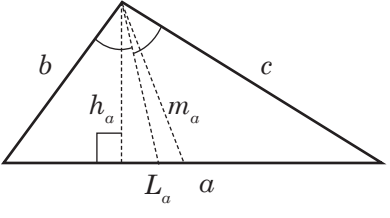
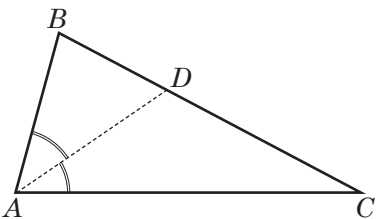


Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Точка *O* — центр вписанной окружности, *AM*, *CK* и *BN* — биссектрисы





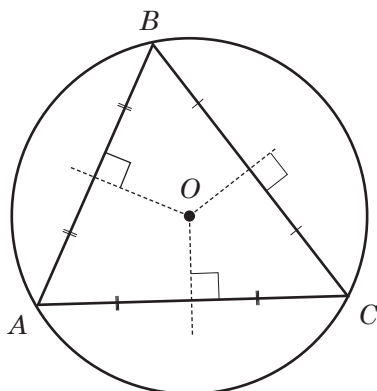
Окончание таблицы

<p><b>Свойство биссектрисы треугольника</b></p> <p>Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам</p>	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};$ <p><math>AD</math> — биссектриса</p>
<p><math>m_a \geq L_a \geq h_a,</math></p> <p>где <math>m</math> — медиана, <math>L</math> — биссектриса, <math>h</math> — высота</p>	
<p><b>Задача.</b></p> <p><math>BD = 6</math> см, <math>DC = 8</math> см,  <math>AD</math> — биссектриса;  <math>P_{\triangle ABC} = 35</math> см.  <math>AB</math> — ? <math>AC</math> — ?</p> <p><i>Решение.</i></p> <p><math>AB + AC = P_{\triangle ABC} - BC =</math>  <math>= 35 - (6 + 8) = 21</math> (см).</p> <p>По свойству биссектрисы:</p> $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$ $\left. \begin{array}{l} AB = 3x \\ AC = 4x \end{array} \right\} 21;$ <p><math>7x = 21; x = 3;</math>  <math>AB = 3 \cdot 3 = 9</math> (см);  <math>AC = 4 \cdot 3 = 12</math> (см).</p> <p><i>Ответ:</i> 12 см.</p>	

**Серединный перпендикуляр** — прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.

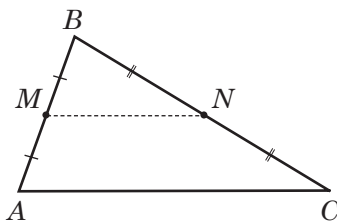
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.

Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**



**Средняя линия треугольника** — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

**Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны**



$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC$$

**Задача.**

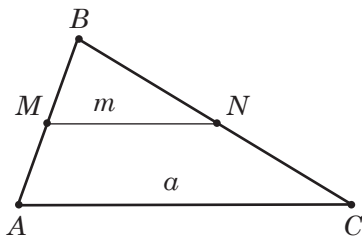
Средняя линия равно-  
стороннего треугольника  
равна 2,5 см.

*Найти:* его периметр.

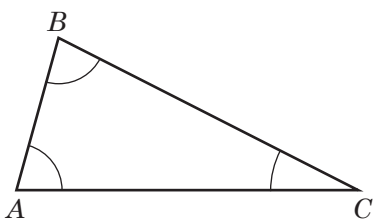
*Решение.*

По теореме о средней линии  
 $m = 0,5a$ , тогда  
 $a = 2m = 5$  см.  $P = 3a = 15$  см.

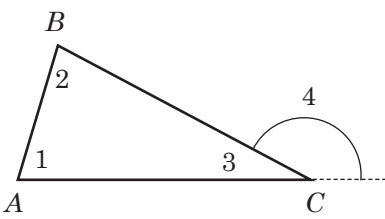
*Ответ:* 15 см.



## Свойства сторон и углов треугольника

<p>Сумма углов треугольника равна <math>180^\circ</math></p> $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	
---	---

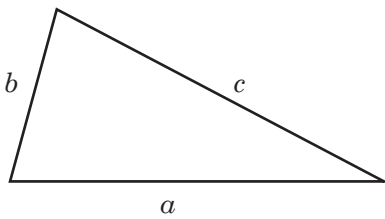
## Внешний угол треугольника

<p><b>Внешний угол</b> треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника.</p> <p><math>\angle 4</math> — внешний (при вершине <math>C</math>)</p>	
---	---

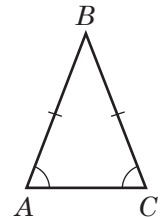
## Свойства внешнего угла треугольника

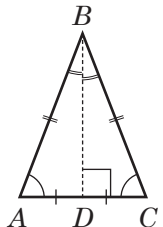
<p>Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним</p>	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
<p>Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним</p>	$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$

## Неравенство треугольника

$a < b + c$ $a >  b - c $	
---------------------------	---

### Равнобедренный треугольник

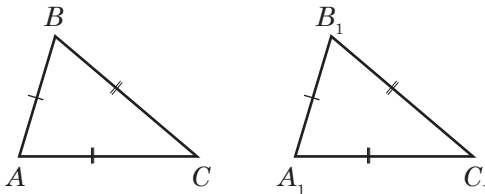
<p><math>\triangle ABC</math> — равнобедренный (<math>AB = BC</math>)  <math>AC</math> — основание, <math>AB</math> и <math>BC</math> — боковые стороны</p>	
---	---

	<p><b>Свойства</b></p> <p>Если в <math>\triangle ABC</math>  <math>AB = BC</math>,          то <math>\angle A = \angle C</math>          (углы при основании равны)</p>	<p><b>Признаки</b></p> <p>Если в <math>\triangle ABC</math>  <math>\angle A = \angle C</math>,          то <math>AB = BC</math>          (равнобедренный треугольник)</p>
---	---	---

<p>Если <math>\triangle ABC</math> — равнобедренный и <math>BD</math> — медиана, проведённая к основанию, то <math>BD</math> — высота и биссектриса</p>	<p>Если в треугольнике совпадают:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>а) высота и медиана или</li> <li>б) высота и биссектриса или</li> <li>в) медиана и биссектриса,</li> </ul> <p>то <b>треугольник</b> является <b>равнобедренным</b></p>
---	---

### Равенство треугольников

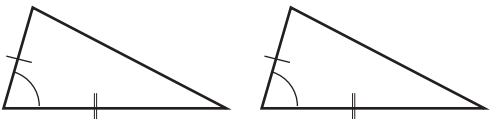
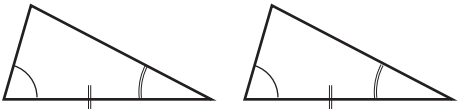
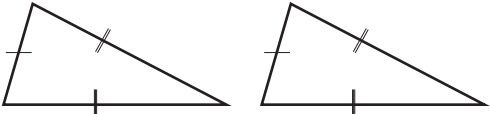
<p><math>\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1</math> <math>\Leftrightarrow</math></p>	<p><math>AB = A_1B_1</math>  <math>AC = A_1C_1</math>  <math>BC = B_1C_1</math></p>	<p><math>\angle A = \angle A_1</math>  <math>\angle B = \angle B_1</math>  <math>\angle C = \angle C_1</math></p>
--	---	---




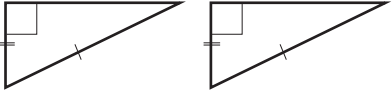
### Свойства равных треугольников

1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.).
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

### Признаки равенства треугольников

По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

### Признаки равенства прямоугольных треугольников

По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
