УДК 373:512(08)
ББК 22.14я2
А45

Алгебра в таблицах. 7—11 кл. : справочное
А45 пособие / авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. — 21-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2017. — 95, [1]с. : ил.
ISBN 978-5-358-18750-4

Пособие содержит таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа. В таблицах кратко изложена теория по каждой теме, приведены основные формулы, графики и примеры решения типовых задач. В конце книги помещен предметный указатель.

Пособие будет полезно учащимся 7—11 классов, абитуриентам, студентам, учителям и родителям.

УДК 373:512(08)
ББК 22.14я2

Учебное издание

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ. 7—11 классы

Справочное пособие

Авторы-составители:
Звавич Леонид Исаакович, **Рязановский** Андрей Рафаилович

Зав. редакцией *Е. Н. Тихонова*. Оформление *А. В. Кузнецов*
Компьютерная верстка *О. А. Молочков*, *С. А. Белых*
Технический редактор *Н. И. Герасимова*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Сертификат соответствия
№ РОСС RU.ПЩ01.Н04166. **12+**

Подписано к печати 03.02.17. Формат 84 × 108 1/32.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,04. Тираж 6000 экз. Заказ № .

ООО «ДРОФА». 123308, Москва, ул. Зорге, дом 1, офис № 313.
Сайт: drofa-ventana.ru

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги можно отправлять по электронному адресу: expert@drofa-ventana.ru

По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь:
тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@drofa.ru; сайт: drofa-ventana.ru/buy/

ISBN 978-5-358-18750-4

От авторов

Тематические таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа предназначены для школьников от седьмого до одиннадцатого классов. В каждой таблице кратко изложена теория конкретного вопроса (определения, теоремы, следствия, формулы); приводятся рисунки, графики, а также примеры решения наиболее принципиальных задач.

Таблицы помогут систематизировать знания, быстро и полно повторить основные моменты той или иной темы, с помощью предметного указателя найти нужные сведения. Таблицы можно разрезать и наклеить на плотную бумагу, оставив оборот чистым для пометок и добавлений (для такой операции надо иметь два экземпляра книги).

Ученик может:

— при подготовке к ответу или к контрольной работе прочитать и обдумать соответствующую таблицу, посмотреть предметный указатель;
— при решении задач по данной теме использовать соответствующую таблицу в качестве справочника;
— после уроков по данной теме самому внести в таблицу (на чистый оборот) добавления и изменения, отметить неизученные в классе вопросы;
— при итоговом повторении материала прежде всего просмотреть таблицы;
— устроить себе или своему товарищу зачет по таблице или предметному указателю;
— использовать таблицу как план ответа на устном экзамене или зачете.

Учитель может:

— использовать таблицы при подготовке к уроку;
— при объяснении нового материала подавать таблицы через кодоскоп (вывешивать на доске увеличенную таблицу), а еще лучше — положить книгу перед каждым учеником;
— проводить письменный или устный опрос по материалам таблиц или предметного указателя;
— использовать таблицы во время проведения самостоятельных работ;
— проводить по таблицам комплексное или тематическое повторение;
— избавить себя от утомительной процедуры «надиктовывания» аналогичных таблиц, план-конспектов, формул и т. п.

Абитуриент может: внимательно прочитав каждую таблицу «от корки до корки», уяснить, всем ли материалом он владеет в должной мере; при недостатке времени таблицы могут быть основным источником тематического повторения при подготовке к письменному экзамену. Если вас ждет и устный экзамен, то материал таблиц должен быть вашим лоцманом при чтении учебников.

Родители ученика могут использовать таблицу:

— для проверки знаний своего ребенка по той или иной теме;

— для проверки своих собственных знаний по школьной математике и для их расширения.

Таблицы могут быть использованы также будущими учителями, репетиторами, членами предметных комиссий институтов, студентами.

Авторы надеются, что таблицы принесут пользу всем, кто будет использовать их в своих занятиях по математике.

Авторы выражают благодарность Борису Петровичу Пигареву, внимательно прочитавшему таблицы и сделавшему ряд ценных замечаний.

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

<table>
<tr><th colspan="3">Множество натуральных чисел</th></tr>
<tr><td colspan="2">N</td><td>Натуральные числа 1; 2; 3...</td></tr>
<tr><th colspan="3">Множество целых чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Z</td><td>N</td><td rowspan="3">Целые числа состоят из натуральных, нуля и чисел, противоположных натуральным.
$N \subset Z$</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>N_-</td></tr>
<tr><th colspan="3">Множество рациональных чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Рациональные числа представимы как $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное.
$N \subset Z \subset Q$</td></tr>
<tr><td>Дроби</td></tr>
<tr><th colspan="3">Множество действительных чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="2">R</td><td>Q</td><td>Действительные числа — это бесконечные десятичные дроби.
$N \subset Z \subset Q \subset R$
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Период не может состоять из одних девяток. Если период состоит из одних нулей, дробь может считаться конечной десятичной дробью.</td></tr>
<tr><td>$\overline{Q}$</td><td>Множество иррациональных чисел.
Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.
$Q \cup \overline{Q} = R$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$3 \in N$, $3 \in Z$, $-6 \notin N$, $-6 \in Z$, $0{,}25 \notin N$, $0{,}25 \notin Z$, $0{,}25 \in Q$, $0{,}25 \in R$.</td></tr>
</table>

Делимость целых неотрицательных чисел

Число a делится на число b, если существует c, такое, что $a = bc$.

$a \vdots b$; *b — делитель a*; *a — кратное b*.

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Свойства делимости

Ноль делится на любое натуральное число.
Любое число делится на единицу.
Любое число делится само на себя.

Если $a > 0$ и $a \vdots b$, то $a \geqslant b$. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$. Если $a \vdots (bc)$, то $a \vdots b$, $a \vdots c$ и $(a : b) \vdots c$.	Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a = b$. Если $a \vdots b$ и $k \neq 0$, то $ak \vdots bk$. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(am + bn) \vdots c$. Если $a \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$, то $b \vdots c$.

Деление с остатком

Для любых двух натуральных чисел a и b найдутся такие целые неотрицательные q и r, что $a = b \cdot q + r$, $0 \leqslant r < b$.

Если $r = 0$, то $a \vdots b$. Число r называется *остатком* от деления a на b.

Признаки делимости

Число делится на два, если его последняя цифра делится на два.	**на 2**
Число делится на пять, если его последняя цифра делится на пять.	**на 5**
Число делится на четыре, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на четыре.	**на 4**
Число делится на двадцать пять, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на двадцать пять.	**на 25**
Число делится на три, если сумма его цифр делится на три.	**на 3**
Число делится на девять, если сумма его цифр делится на девять.	**на 9**
Число делится на одиннадцать, если алгебраическая сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$ делится на одиннадцать.	**на 11**

Десятичная запись n-значного натурального числа:

$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0} =$

$= a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0;$

a_i — цифры числа, $a_{n-1} \neq 0$, $n \in N$.

НОК $(a; b)$	Наименьшее положительное из общих кратных чисел a и b называется *наименьшим общим кратным* этих чисел. НОК (15; 10) = 30
НОД $(a; b)$	Наибольший из общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* этих чисел. НОД (15; 10) = 5

НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = a \cdot b$

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД $(a; b) = 1$.

Натуральное число p называется *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя (единицу и само это число).

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23... — простые числа

Свойства простых чисел

Любое натуральное число либо делится на простое, либо взаимно просто с ним.

Произведение натуральных чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на это простое число.

Простых чисел бесконечно много (нет самого большого простого числа).

Если натуральное число не делится ни на одно простое, квадрат которого не превосходит это натуральное число, то оно само простое.

Любое простое число p $(p > 3)$ представимо в виде $p = 6k \pm 1$, $k \in N$.

Каноническое разложение натурального числа n $(n > 1)$:

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — простое, $p_i < p_{i+1}$ и $0 < \alpha_i \in N$.

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Таблица 2. МОДУЛЬ

$$|a| = \left[\begin{array}{ll} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{array}\right.$$

Основные свойства модуля	**Геометрическая интерпретация модуля**
$|a| \geqslant 0 \quad |-a| = |a|$ $|a - b| = |b - a|$ $|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$	Если точка A на числовой оси имеет координату a, то расстояние от A до 0 равно $|a|$.

Расстояние между точками $A\ (a)$ и $B\ (b)$ на прямой равно $|a - b|$.

Уравнения с модулем

$|x| = a$	$|x - b| = a$	$|f(x)| = |g(x)|$	$|f(x)| = g(x)$
$a < 0$ решений нет	$a < 0$ решений нет	равносильно объединению уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$	равносильно системе уравнений $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$
$a = 0 \ x = 0$	$a = 0 \ x = b$		
$a > 0$ $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$	$a > 0$ $\left[\begin{array}{l} x = b - a \\ x = b + a \end{array}\right.$		

Неравенства с модулем

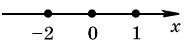
$|x - b| < a$	$|x - b| \geqslant a$	$|f(x)| < g(x)$	$|f(x)| > g(x)$
$a \leqslant 0$ решений нет	$a \leqslant 0$ $x \in R$	равносильно системе: $\left\{\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right.$	равносильно объединению: $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$a > 0$ $b - a < x <$ $< b + a$	$a > 0$ $x \leqslant b - a$ или $x \geqslant b + a$		

Неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) > g^2(x)$ или неравенству $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

Примеры

Раскрытие модулей «по промежуткам»

$y = |x + 2| + 3\,|x| - 2\,|x - 1|$

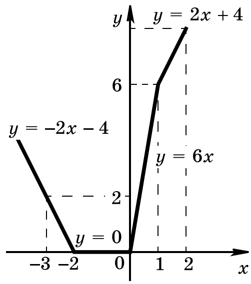


$x \leqslant -2$, $y = -(x + 2) - 3x + 2\,(x - 1) = -2x - 4$

$-2 < x \leqslant 0$, $y = x + 2 - 3x + 2\,(x - 1) = 0$

$0 < x \leqslant 1$, $y = x + 2 + 3x + 2\,(x - 1) = 6x$

$x > 1$, $y = x + 2 + 3x - 2\,(x - 1) = 2x + 4$



Решить уравнение $3x^2 - 5|x| - 8 = 0$.

Заметим, что $|x|^2 = x^2$; введем обозначение $|x| = t$.

$3t^2 - 5t - 8 = 0$.

$t_1 = -1$; $t_2 = \dfrac{8}{3}$.

$|x| = -1$, решений нет.

$|x| = \dfrac{8}{3}$; $x_1 = -\dfrac{8}{3}$, $x_2 = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{8}{3}$; $x_2 = \dfrac{8}{3}$.

Построить график функции $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$.

Данная функция периодическая, период $T = 2\pi$.

Построим график на каждом промежутке знакопостоянства косинуса.

При $\cos x > 0$ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y = \sin x$;

при $\cos x < 0$ $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $y = -\sin x$.

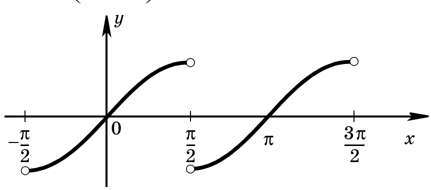


Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Сложение многочленов: $(a^2 + ab - b) + (3a^2 - 2ab + b) = 4a^2 - ab$.

Вычитание многочленов:

$(2a - b) - (3a + b) = (2a - b) + (-3a - b) = -a - 2b$.

Умножение многочленов:

$(a + 3b)(a - b) = a^2 - ab + 3ab - 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2$.

Формулы сокращенного умножения

квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Бином Ньютона: $(a + b)^n =$

$$= a^n + C_n^1\, a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

$$C_n^1 = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}; \quad C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$n \in N,\ n > 1 \quad (0! = 1;\ 1! = 1;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n).$$

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Основные приемы разложения многочлена на множители

Вынесение общего множителя за скобку	$2ab + 14a^2 + 2a = 2a\,(b + 7a + 1)$; $3a^2b^3 - 15a^3b = 3a^2b\,(b^2 - 5a)$.
Метод группировки	$ab + ac - b - c = a\,(b + c) - (b + c) = (b + c)\,(a - 1)$.
Использование формул сокращенного умножения	$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$; $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 - 2a + 2)\,(a^2 + 2a + 2)$.
Дополнительные формулы	$(a^n - 1) = (a - 1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$; $(a^{2m+1} + 1) = (a + 1)\,(a^{2m} - a^{2m-1} + \ldots - a + 1)$.

Многочлены от одной переменной

Общий вид: $f\,(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$,
n — степень многочлена, a_i — коэффициенты, a_n — старший коэффициент, $a_n \neq 0$.

Если $a_n = 1$, то многочлен называется *приведенным*.

$3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$ — многочлен 4-й степени с коэффициентами: $a_4 = 3$; $a_3 = -1$; $a_2 = 2$; $a_1 = 0$; $a_0 = -5$.

Квадратный трехчлен — многочлен второй степени

$$ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

a — первый коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Деление многочленов

Теорема о делении с остатком

$P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)$, где
$P(x)$ — делимое, $M(x)$ — делитель, $Q(x)$ — частное, $R(x)$ — остаток. Если остаток не равен нулю, то его степень меньше степени делителя.

$$\underbrace{3x^3 - x^2 - 3x - 2}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{M(x)}\,\underbrace{(3x - 4)}_{Q(x)} + \underbrace{(4x - 6)}_{R(x)}$$

Деление «уголком»

$$\begin{array}{r|l}
-\,3x^3 - x^2 - 3x - 2 & x^2 + x - 1 \\
\underline{3x^3 + 3x^2 - 3x\phantom{{}-2}} & \overline{3x - 4} \\
-\,4x^2 \phantom{{}-3x} - 2 & \\
\underline{-\,4x^2 - 4x + 4} & \\
4x - 6 &
\end{array}$$

$P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x - 2$
$M(x) = x^2 + x - 1$
$Q(x) = 3x - 4$
$R(x) = 4x - 6$